Romer Model

A. 최종재 부문

   i. 생산함수 : $Y = L_Y^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{A} x_j^{\alpha}$,

      1. 수학적인 편리함: sum 을 적분으로 대체 $\Rightarrow$ $Y = L_Y^{1-\alpha}\int_0^A x_j^{\alpha} dj$

   ii. 최종재 생산 기업의 이윤극대화 문제

      1. $\max_{L_Y, x_j} L_Y^{1-\alpha}\int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj$

      2. 1 계조건

         A. $w = (1-\alpha)\dfrac{Y}{L_Y}$

         B. $p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}$ $(\Leftarrow L_Y^{1-\alpha}\int_0^A \alpha x_j^{\alpha-1} dj - \int_0^A p_j dj = \int_0^A \left(\alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} - p_j\right) dj = 0)$

B. 중간재 부문

   i. 중간재 기업의 이윤극대화 문제

      1. $\max_{x_j} \pi_j = p_j\left(x_j\right)x_j - rx_j$

      2. 1 계조건

         A. $p'(x)x + p(x) - r = 0 \;\Rightarrow\; p'(x)\dfrac{x}{p} + 1 = \dfrac{r}{p} \;\Rightarrow\; p = \dfrac{1}{1+\dfrac{p'x}{p}}r$

         B. $\dfrac{p'x}{p} = \alpha(\alpha-1)L_Y^{1-\alpha}x^{\alpha-2}\cdot\dfrac{x}{\alpha L_Y^{1-\alpha}x^{\alpha-1}} = (\alpha-1) \Rightarrow \; p = \dfrac{1}{\alpha}r$

      3. 모든 게 대칭적이므로 모든 기업의 자본재에 대한 가격은 동일하며, 고용되는 자본재의 양도 동일함

         A. $\Rightarrow \; \pi = rx\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \alpha(1-\alpha)\dfrac{Y}{A}$

            $(\Leftarrow Y = L_Y^{1-\alpha}\int_0^A x_j^{\alpha} dj = L_Y^{1-\alpha}Ax^{\alpha} \Rightarrow p = \alpha L_Y^{1-\alpha}x^{\alpha-1} = \alpha\dfrac{Y}{Ax} \Rightarrow rx = \dfrac{\alpha^2 Y}{A})$

         B. $xA = K \;\Rightarrow x = \dfrac{K}{A}$

            $r = \alpha^2\dfrac{Y}{K} < \alpha\dfrac{Y}{K}$ $\quad(\Leftarrow r = \alpha p = \alpha^2\dfrac{Y}{Ax} = \alpha^2\dfrac{Y}{K})$

         C. $Y = L_Y^{1-\alpha}\int_0^A x_j^{\alpha} dj = L_Y^{1-\alpha}Ax^{\alpha} = L_Y^{1-\alpha}A\left(\dfrac{K}{A}\right)^{\alpha} = K^{\alpha}\left(AL_Y\right)^{1-\alpha}$

C. 연구개발 부문

   i. Arbitrage Equation: $rP_A = \pi + \dot{P}_A$

      1. $\Rightarrow \; r = \dfrac{\pi}{P_A} + \dfrac{\dot{P}_A}{P_A} = \dfrac{\pi}{P_A} + \hat{P}_A \Rightarrow \; \hat{\pi} = \hat{P}_A = n$ $\;(\Leftarrow \hat{\pi} = \alpha(1-\alpha)\dfrac{Y}{A} = \hat{Y} - \hat{A} = \hat{L})$

      2. $\Rightarrow \; P_A = \dfrac{\pi}{r-n} = \int_0^{\infty} \pi e^{-(r-n)t} dt$ (균형성장경로에서의 특허의 가격)