Solow모형에 대한 수학적 풀이

Q) 초기치(initial values) $y_0 = k_0^\alpha$ 및 모수(parameter) s, n, d, α 등이 주어졌을 때, 미분방정식 $y(t) = k(t)^\alpha$, $\dfrac{dk(t)}{dt} = sy(t) - \gamma k(t)$ 의 해는?

A)

일반적으로 1계선형미분방정식이 $\dfrac{dx}{dt} + ax = b$ 와 같이 주어졌을 때, 그 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\rightarrow \left[\frac{dx}{dt} + ax\right] = b \;\rightarrow\; \int e^{at}\left[\frac{dx}{dt} + ax\right]dt = \int e^{at} b\,dt$$

$$\rightarrow \int e^{at}\left[\frac{dx}{dt} + ax\right]dt = \int \frac{d}{dt} e^{at} x\,dt = e^{at}x + c_0,$$

$$\int e^{at} b\,dt = \frac{b}{a}\int \frac{d}{dt} e^{at} dt = \frac{b}{a} e^{at} + c_1$$

$$\rightarrow e^{at}x + c_0 = \frac{b}{a}e^{at} + c_1 \;\rightarrow\; x(t) = c_2 e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$\rightarrow$ $x = x_0$ 일 경우, $x_0 = c_2 + \dfrac{b}{a}$ $\rightarrow$ $c_2 = x_0 - \dfrac{b}{a}$

$$\rightarrow x(t) = \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$$

주어진 미분방정식은 $\dfrac{dk}{dt} = sk^\alpha - \gamma k$ 와 같이 하나의 식으로 쓸 수 있으며(시간변수는 표시 생략함), k에 대한 해를 구하면 y에 대한 해는 생산함수로부터 바로 도출된다.

우선 주어진 미분방정식을 1계선형방정식의 형태로 만들기 위해 해당 식을 $z \equiv k^{1-\alpha}$ 의 식으로 변환한다.

이 때, 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dk^{1-\alpha}}{dt} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\frac{dk}{dt} = (1-\alpha)z\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} \;\rightarrow\; \frac{dk}{dt} = \frac{dz}{dt}\frac{k}{(1-\alpha)z}$$

이를 이용하면 주어진 미분방정식은

$$\frac{dz}{dt}\frac{k}{(1-\alpha)z}=\frac{sk}{z}-\gamma k \;\rightarrow\; \frac{dz}{dt}=(1-\alpha)s-(1-\alpha)\gamma z$$

이렇게 해서 도출된 식은 $a=(1-\alpha)\gamma$, $b=(1-\alpha)s$ 인 1계 선형미분방정식이다. 따라서 그 해는 다음과 같이 주어진다.

$$z(t)=\left(z_0-\frac{b}{a}\right)e^{-at}+\frac{b}{a} \;\rightarrow\; k(t)^{1-\alpha}=\left(k_0^{1-\alpha}-\frac{s}{\gamma}\right)e^{-at}+\frac{s}{\gamma}$$

$$\rightarrow\; y(t)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\left(y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}-\frac{s}{\gamma}\right)e^{-at}+\frac{s}{\gamma}=\frac{s}{\gamma}\left(1-e^{-at}\right)+y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}e^{-at}$$

$$\rightarrow\; y(t)=\left[\frac{s}{\gamma}\left(1-e^{-at}\right)+y_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}e^{-at}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$