가) CES 생산함수와 요소간 대체탄력성

i. $Y = F(K,E) = \left(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$

ii. K 와 L 간의 요소대체탄력성 $\sigma \equiv \frac{1}{1-\rho}$ 의 도출

전미분(Total differentiation) →

$$0 = \frac{1}{\rho}\left(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}\left[\alpha\rho K^{\rho-1}dK + (1-\alpha)\rho B(BE)^{\rho-1}dE\right]$$

$$\Rightarrow MRTS \equiv -\left.\frac{dK}{dE}\right|_{Y=\bar{Y}} = \frac{(1-\alpha)B(BE)^{\rho-1}}{\alpha K^{\rho-1}} = \frac{(1-\alpha)B^{\rho}}{\alpha}\left(\frac{E}{K}\right)^{\rho-1}$$

$$\frac{MRTS}{\left(K/E\right)} = \frac{(1-\alpha)B^{\rho}}{\alpha}\left(\frac{E}{K}\right)^{\rho-1} \times \left(\frac{E}{K}\right) = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{BE}{K}\right)^{\rho}$$

$$\frac{d\left(K/E\right)}{d(MRTS)} = d\left(K/E\right) \Big/ d\left[\frac{(1-\alpha)B^{\rho}}{\alpha}\left(\frac{E}{K}\right)^{\rho-1}\right]$$

$$= d\left(K/E\right) \Big/ d\left[\frac{(1-\alpha)B^{\rho}}{\alpha}\left(\frac{K}{E}\right)^{1-\rho}\right]$$

$$= 1 \Big/ \left[\frac{(1-\alpha)B^{\rho}}{\alpha}(1-\rho)\left(\frac{K}{E}\right)^{-\rho}\right] = \frac{\alpha}{(1-\rho)(1-\alpha)}\left(\frac{BE}{K}\right)^{-\rho}$$

$$\Rightarrow \sigma \equiv \frac{d\left(K/E\right)}{d(MRTS)}\frac{MRTS}{\left(K/E\right)} =$$

$$\left|\frac{\alpha}{(1-\rho)(1-\alpha)}\left(\frac{BE}{K}\right)^{-\rho}\right|\left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\left(\frac{BE}{K}\right)^{\rho}\right] = \frac{1}{1-\rho}$$

나) CES 생산함수의 특수한 형태로서의 C-D 생산함수

$Y = F(K,E) = \left(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, 자본과 에너지 두 가지 요소만 있는 경우임(노동을 포함해도 차이는 없음): ρ는 생산함수의 곡률 파라메터, B 는 외생적으로 주어지는 에너지 특정의 기술(Energy specific or augmenting technology) 변화를 나타냄

i. 이 경우 자본과 에너지 간의 대체 탄력성은 $\sigma \equiv \frac{1}{1-\rho}$

1. 로는 1 보다는 작음. 따라서 시그마는 양의 값을 가짐
2. 요소간 대체탄력성은 로가 0 와 1 사이인 경우 1 보다 크게되고 0 보다 작

은 경우 대체탄력성은 1 보다 작게됨. C-D 생산함수는 대체탄력성이 1 인 경우(로가 0 인 경우임)

$$\log Y = \frac{1}{\rho}\log\left(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\right)$$

$$\rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\log\left(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\right)$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{1}\frac{\left(\alpha K^{\rho}\log K + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\log(BE)\right)}{\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}}, \quad \Leftarrow \text{L'hopital's rule}$$

$$= \alpha\log K + (1-\alpha)\log(BE)$$

다) CES 생산함수에서의 요소소득 비중

완전경쟁하에서 요소가격은 그 한계생산과 같고 요소소득 비중은

$$\frac{\partial Y}{\partial E} = \frac{1}{\rho}\left(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}(1-\alpha)\rho B(BE)^{\rho-1}$$

$$= (1-\alpha)Y^{1-\rho}B(BE)^{\rho-1} = P_E$$

$$\rightarrow v_E \equiv \frac{P_E E}{Y} = (1-\alpha)\left(\frac{BE}{Y}\right)^{\rho}$$