제 13 강

연립방정식 모형

Simultaneous Equations Models

연립방정식 모형 -서론

- 연립방정식모형(Simultaneous equations models) 은 일련의 방정식 집합 (시스템)으로 이루어짐
- 연립방정식모형을 구성하고 있는 방정식은 둘 혹은 그 이상의 내생변수들을 포함
- 최소제곱추정방법은 연립방정식모형에서는 부적절함

예: 수요공급모형

구조방정식

- 구조방정식: 경제 현상에서 관측되는 경제적 변수들 간의 (구조적) 관계를 묘사하는 이론으로부터 도출된 방정식
  - ex.수요공급모형, 케인지언 모형
- 수요공급모형 (통계적 모형)

  Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$

  - 상품의 수요량(q)는 가격(p)과 소득 (y)의 함수
  - 상품의 공급량(q)은 가격(p)과 요소비용(w)의 함수
  - 균형에서 수요량=공급량=균형거래량(q)과 균형(p)가격이 결정됨
  - q, p : 내생변수, y, w: 외생변수

예: 수요공급모형

구조방정식

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$

- 수요함수의 α_1을 추정함에 있어서, 공급함수의 p는 q의 함수로 표현될 수 있고, q에는 ε_d 가 포함되어 있음
- 일반적으로 연립구조방정식에서의 모수들에 대한 최소제곱추정량은 방정식의 오른쪽에 있는 내생변수들이 오차항과 상관되어 있으므로 해서 비일치(inconsistent) 추정이 됨

예: 수요공급모형

축약형 (유도) 방정식(reduced form equation)의 도출

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$

$$\Rightarrow p = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y - \frac{\beta_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} w + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \equiv \pi_{p1} y + \pi_{p2} w + v_1$$

$$\Rightarrow q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s = \beta_1 \left[\frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y - \frac{\beta_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} w + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \right] + \beta_2 w + \varepsilon_s$$

$$= \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\beta_2 \alpha_1}{(\beta_1 - \alpha_1)} w + \frac{\beta_1 \varepsilon_d - \alpha_1 \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \equiv \pi_{q1} y + \pi_{q2} w + v_2$$

$\Rightarrow p = \pi_{p1} y + \pi_{p2} w + v_1$, $q = \pi_{q1} y + \pi_{q2} w + v_2$: <u>축약형 방정식</u>

예: 수요공급모형

식별의 문제

구조적 모수들: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_1$

축약형 모수들: $\pi_{p1}\ \pi_{p2}\ \pi_{q1}\ \pi_{q2}$

- 축약형 방정식의 모수들은 최소제곱추정을 통한 일치 추정이 가능 (등호 오른쪽 변수들이 모두 외생변수들)
- 식별의 문제는 구조적 모수들에 대한 일치추정이 가능한가 여부에 대한 문제이며, 원래의 구조방정식의 구조적 모수들이 일치 추정되는 축약형 방정식의 축약형 모수들로부터 unique하게 표현되는지를 결정하는 문제로도 볼 수도 있음

예: 수요공급모형

식별의 문제

$$\pi_{p1} = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)},\ \pi_{p2} = \frac{\beta_2}{(\beta_1 - \alpha_1)},\ \pi_{q1} = \frac{\beta_1\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)},\ \pi_{q2} = \frac{\beta_2\alpha_1}{(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi_{q2}}{\pi_{p2}},\ \alpha_2 = \frac{\pi_{p2}\pi_{q1} - \pi_{p1}\pi_{q2}}{\pi_{p1}}\quad \beta_1 = \frac{\pi_{q1}}{\pi_{p1}},\ \beta_2 = \frac{\pi_{p2}\pi_{q1} - \pi_{p1}\pi_{q2}}{\pi_{p2}}$$

- 따라서 이 경우에는 축약형 모수들 π_{p1} π_{p2} π_{q1} π_{q2}에 대한 일치 추정치로부터, 구조적 모수들: α_1, α_2, β_1, β_1 의 값을 unique하게 대응 시킬 수 있음
  - 구조적 모수들이 일치 추정될 수 있음을 의미 – 식별이 됨을 의미

식별의 문제

과소, 정확, 과다 식별

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 표현될 수 없는 경우 방정식은 과소식별 (under-identified)된다고 함

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 Unique하게 표현되는 경우 방정식은 정확식별 (exactly-identified)된다고 함

구조적(행태) 모수들을 축약형 모수들로 표현할 수 있는 해(solution)가 하나 이상인 경우 (but finite) 방정식은 과다식별 (over-identified)된다고 함

식별의 문제

식별의 일반적 조건

M 개의 내생변수들의 값을 결정하는 M 개의 연립방정식으로 구성된 시스템에서 시스템을 구성하는 어떤 한 방정식의 모수들을 일치추정하는 것이 가능하기 위해서는 적어도 $M-1$ 개의 변수들이 그 방정식에서 빠져 있어야 함

식별의 문제

과소 식별의 예

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- 이 모형에서 q(수량)와 p(가격)는 내생변수, y(소득)는 외생변수임
- 이러한 수요 공급 모형에서 M=2 (내생변수의 수)이며 시스템내의 변수는 p, q 및 y의 세 개임
- 수요방정식에서는 아무런 변수도 빠져 있지 않으며, 따라서 이 방정식은 과소 식별됨. 즉 그 모수들은 일치추정할 수 없음
- 공급방정식에서는 M–1=1, 즉 하나의 변수 y가 빠져 있으며, 따라서 공급방정식의 모수는 일치 추정이 가능함

식별의 문제

과소식별의 예

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- Reduced form equation

$$p = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \pi_1 y + v_1$$

$$q = \beta_1 p + e_s = \beta_1 \left[\frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \right] + \varepsilon_s = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\beta_1 \varepsilon_d - \alpha_1 \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \pi_2 y + v_2$$

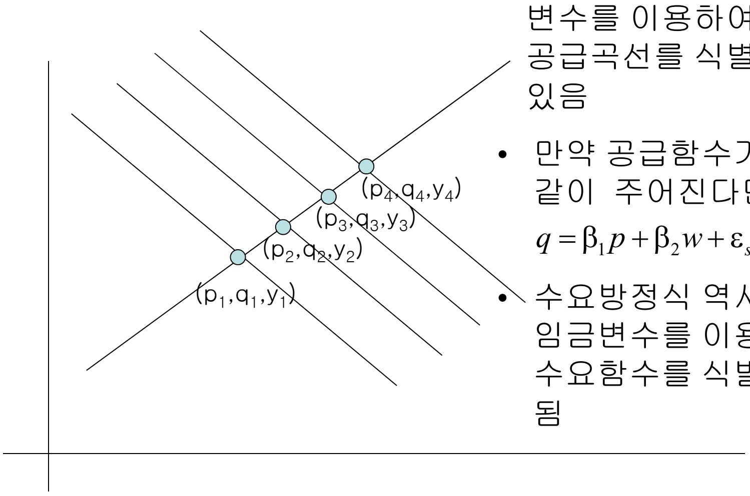
$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \beta_1 \pi_1$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_1}$$

- 하지만 α_1 와 α_2 는 π_1 와 π_2 에 의해 결정되지 않음

식별의 문제

그림을 통한 이해



- 공급방정식에서 빠진 소득 변수를 이용하여 공급곡선를 식별할 수 있음
- 만약 공급함수가 다음과 같이 주어진다면

$$q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$$

- 수요방정식 역시 빠진 임금변수를 이용하여 수요함수를 식별할 수 있게 됨

식별의 문제

식별의 일반조건의 의미

- 연립방정식내의 한 방정식에서 2SLS추정에 필요한 최소한의 도구변수의 수는 방정식의 오른편에 있는 내생변수들의 수와 같음
- 연립방정식내의 방정식들에는 전형적으로 오른편에 몇 개의 외생변수들이 나타남.
- 도구변수들은 방정식의 오른편에서 빠져 있는 외생변수만을 사용할 수 있음
- 결과적으로 식별은 한 방정식에서 빠져 있는 외생변수의 수가 적어도 오른편에 있는 내생변수의 수만큼 되어야 함을 요구함

연립방정식 모형의 추정

2단계최소제곱추정

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2\, y_{t2} + \beta_3\, x_{t1} + \varepsilon_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2\, y_{t1} + \alpha_3\, x_{t2} + \varepsilon_{t2}$$

문제: 오른편 내생변수들 y_{t2} 과 y_{t1} 가 오차항들과 상관되어 있음

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정

해법 : 먼저 축약형 방정식을 도출함

$$\begin{cases} y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2} \end{cases}$$

⇒ 즉 두 내생변수 y_{t1}, y_{t2} 들에 대해 방정식을 품

$$\begin{cases} y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + \nu_{t1} \\ y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + \nu_{t2} \end{cases}$$

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정 – 1단계

$$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + \nu_{t1}$$

$$y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + \nu_{t2}$$

최소제곱추정을 통해 예측치를 얻음

$$\hat{y}_{t1} = \hat{\pi}_{11} + \hat{\pi}_{21} x_{t1} + \hat{\pi}_{31} x_{t2}$$

$$\hat{y}_{t2} = \hat{\pi}_{12} + \hat{\pi}_{22} x_{t1} + \hat{\pi}_{32} x_{t2}$$

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정 – 2단계

y_{t1} , y_{t2} 를 예측치로 대체함

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2}$$

각 방정식에 대해 최소제곱추정을 적용하여
2SLS추정치를 구함

$$\tilde{\beta}_1 , \tilde{\beta}_2 , \tilde{\beta}_3 , \tilde{\alpha}_1 , \tilde{\alpha}_2 \text{ and } \tilde{\alpha}_3$$

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정 – 정리

$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1}$: 구조 방정식

$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + \nu_{t1}$: 축약형 방정식

$y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + \nu_{t2}$

1 단계 최소제곱추정 $\Rightarrow$ $\hat{y}_{t1} , \hat{y}_{t2}$

$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1}$

$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2}$

2 단계최소제곱 추정 $\Rightarrow$ 모수들에 대한 일치 추정량