제 13 강

연립방정식 모형

Simultaneous Equations Models

연립방정식 모형 -서론

- 연립방정식모형(Simultaneous equations models) 은 일련의 방정식 집합 (시스템)으로 이루어짐
- 연립방정식모형을 구성하고 있는 방정식은 둘 혹은 그 이상의 종속변수들을 포함
- 최소제곱추정방법은 연립방정식모형에서는 부적절함

Keynes의 거시경제 모형

Assumptions of Simple Keynesian Model

1. 소비는, c, 소득 y의 함수

2. 지출=소득(=y) = 소비 + 투자

3. 투자는 소득과 무관하게 결정됨

Keynes의 거시경제 모형 - 구조방정식

구조방정식(Structural Equation)

소비는 소득의 함수:

$$c = \beta_1 + \beta_2 y$$

소득은 소비되거나 투자 됨:

$$y = c + i$$

Keynes의 거시경제 모형 – 통계적 모형

소비방정식:

$$c_t = \beta_1 + \beta_2\, y_t + \varepsilon_t$$

내생변수들

소득항등식:

외생변수

$$y_t = c_t + i_t$$

Keynes의 거시경제 모형 – 연립방정식 모형의 본질

2. 1.

$$c_t = \beta_1 + \beta_2\, y_t + \varepsilon_t$$

5. 3. 4.

$$y_t = c_t + i_t$$

y_t 가 ε_t 를 포함하고 있으므로 이들은 상관되어 있음

연립방정식 모형 –최소제곱추정의 실패

연립구조방정식에서의 모수들에 대한 최소제곱추정량은 방정식의 오른쪽에 있는 내생변수들이 오차항과 상관되어 있으므로 해서 편향되고(biased) 비일치인(inconsistent) 추정이 됨

연립방정식 모형의 추정

축약형 (유도) 방정식(reduced form equation)의 도출

$$c_t = \beta_1 + \beta_2 y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t = c_t + i_t$$

$$c_t = \beta_1 + \beta_2 (c_t + i_t) + \varepsilon_t$$

$$(1 - \beta_2) c_t = \beta_1 + \beta_2 i_t + \varepsilon_t$$

연립방정식 모형의 추정

축약형방정식의 도출

$$(1 - \beta_2)c_t = \beta_1 + \beta_2 i_t + \varepsilon_t$$

$$c_t = \frac{\beta_1}{(1-\beta_2)} + \frac{\beta_2}{(1-\beta_2)} i_t + \frac{1}{(1-\beta_2)} \varepsilon_t$$

$$c_t = \pi_{11} + \pi_{21} i_t + \nu_t$$

The Reduced Form Equation

연립방정식 모형의 추정

축약형방정식의 도출

$$y_t = c_t + i_t$$

where $c_t = \pi_{11} + \pi_{21} i_t + \nu_t$

$$y_t = \pi_{11} + (1+\pi_{21}) i_t + \nu_t$$

$$y_t = \pi_{12} + \pi_{22} i_t + \nu_t$$

Keynes의 거시경제 모형 - 축약형방정식

$$c_t = \pi_{11} + \pi_{21}\, i_t + \nu_t$$
$$(y_t = \pi_{12} + \pi_{22}\, i_t + \nu_t)$$

c_t 와 y_t 가 항등식을 통해 연결되어 있기 때문에 축약형 방정식의 오차항(ν_t)이 같지만, 일반적인 경우는 아님

$$\pi_{11} = \pi_{12} = \frac{\beta_1}{(1-\beta_2)}\ , \quad \pi_{21} = (\pi_{22}-1) = \frac{\beta_2}{(1-\beta_2)}$$

식별의 문제

구조적 모수들: $\beta_{1,}\ \beta_2.$

축약형 모수들: $\pi_{11}\ ,\ \pi_{21}.$

일단 유도 방정식의 모수들이 추정되면,
식별의 문제는 원래의 구조방정식의 모수들이 일치 추정되는 축약형 방정식의 모수들로부터 unique하게 표현되는지를 결정하는 문제임

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_{11}}{\hat{\pi}_{21}+1} \qquad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{21}+1}$$

연립방정식 모형

식별의 문제

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 표현될 수 없는 경우 방정식은 과소식별 (under-identified)된다고 함

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 Unique하게 표현되는 경우 방정식은 정확식별 (exactly-identified)된다고 함

구조적(행태) 모수들을 축약형 모수들로 표현할 수 있는 해(solution)가 하나 이상인 경우 방정식은 과다식별 (over-identified)된다고 함

연립방정식 모형

식별의 일반적 조건

M 개의 내생변수들의 값을 결정하는 M 개의 연립방정식으로 구성된 시스템에서 시스템을 구성하는 어떤 한 방정식의 모수들을 일치추정하는 것이 가능하기 위해서는 적어도 $M-1$ 개의 변수들이 그 방정식에서 빠져 있어야 함

연립방정식 모형

식별의 문제

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- 이 모형에서 q(수량)와 p(가격)는 내생변수, y(소득)는 외생변수임
- 이러한 수요 공급 모형에서 M=2 (내생변수의 수)이며 시스템내의 변수는 p, q 및 y의 세 개임
- 수요방정식에서는 아무런 변수도 빠져 있지 않으며, 따라서 이 방정식은 과소식별됨. 즉 그 모수들은 일치추정할 수 없음
- 공급방정식에서는 $M-1=1$, 즉 하나의 변수 y가 빠져 있으며, 따라서 공급방정식의 모수는 일치추정이 가능함

연립방정식 모형

식별의 문제

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- Reduced form equation

$$p = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{e_d - e_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \pi_1 y + v_1$$

$$q = \beta_1 p + e_s = \beta_1 \left[\frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{e_d - e_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \right] + e_s = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\beta_1 e_d - \alpha_1 e_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \pi_2 y + v_2$$

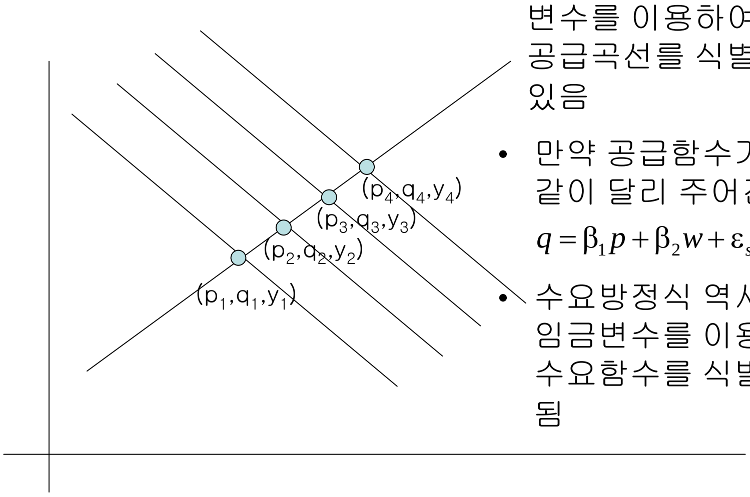
$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \beta_1 \pi_1$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_1}$$

- 하지만 α_1 와 α_2 는 π_1 와 π_2 에 의해 unique하게 결정되지 않음

연립방정식 모형

식별의 문제



- 공급방정식에서 빠진 소득 변수를 이용하여 공급곡선를 식별할 수 있음
- 만약 공급함수가 다음과 같이 달리 주어진다면
  $q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$
- 수요방정식 역시 빠진 임금변수를 이용하여 수요함수를 식별할 수 있게 됨

연립방정식 모형

식별의 문제

- 연립방정식내의 한 방정식에서 2SLS추정에 필요한 도구변수의 수는 방정식의 오른편에 있는 내생변수들의 수와 같음
- 연립방정식내의 방정식들에는 전형적으로 오른편에 몇 개의 외생변수들이 나타남.
- 도구변수들은 방정식의 오른편에서 빠져 있는 외생변수만을 사용할 수 있음
- 결과적으로 식별은 한 방정식에서 빠져 있는 외생변수의 수가 적어도 오른편에 있는 내생변수의 수만큼 되어야 함을 요구함

연립방정식 모형의 추정

2단계최소제곱추정

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2\, y_{t2} + \beta_3\, x_{t1} + \varepsilon_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2\, y_{t1} + \alpha_3\, x_{t2} + \varepsilon_{t2}$$

문제: 오른편 내생변수들 y_{t2} 과 y_{t1} 가 오차항들과 상관되어 있음

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정

해법 : 먼저 축약형 방정식을 도출함

$$\begin{cases} y_{t1} = \beta_1 + \beta_2\, y_{t2} + \beta_3\, x_{t1} + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2\, y_{t1} + \alpha_3\, x_{t2} + \varepsilon_{t2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 즉 두 내생변수 y_{t1}, y_{t2} 들에 대해 방정식을 품

$$\begin{cases} y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21}\, x_{t1} + \pi_{31}\, x_{t2} + \nu_{t1} \\ y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22}\, x_{t1} + \pi_{32}\, x_{t2} + \nu_{t2} \end{cases}$$

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정 – 1단계

$$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + \nu_{t1}$$

$$y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + \nu_{t2}$$

최소제곱추정을 통해 예측치를 얻음

$$\hat{y}_{t1} = \hat{\pi}_{11} + \hat{\pi}_{21} x_{t1} + \hat{\pi}_{31} x_{t2}$$

$$\hat{y}_{t2} = \hat{\pi}_{12} + \hat{\pi}_{22} x_{t1} + \hat{\pi}_{32} x_{t2}$$

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정 – 2단계

$y_{t1} = \hat{y}_{t1} + \hat{\nu}_{t1}$ and $y_{t2} = \hat{y}_{t2} + \hat{\nu}_{t2}$

y_{t1}, y_{t2} 를 예측치로 대체함

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2}$$

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 (\hat{y}_{t2} + \hat{\nu}_{t2}) + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 (\hat{y}_{t1} + \hat{\nu}_{t1}) + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2}$$

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정 – 2단계

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2}$$

where $u_{t1} = \beta_2 \hat{v}_{t2} + \varepsilon_{t1}$ and $u_{t2} = \alpha_2 \hat{v}_{t1} + \varepsilon_{t2}$

각 방정식에 대해 최소제곱추정을 적용하여
2SLS추정치를 구함

$$\tilde{\beta}_1 , \tilde{\beta}_2 , \tilde{\beta}_3 , \tilde{\alpha}_1 , \tilde{\alpha}_2 \text{ and } \tilde{\alpha}_3$$

연립방정식 모형

2단계최소제곱추정 – 정리

$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1}$: 구조 방정식

$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + v_{t1}$: 축약형 방정식

$y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + v_{t2}$

1 단계 최소제곱추정 ⇒ $\hat{y}_{t1} , \hat{y}_{t2}$

$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1}$

$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2}$

2 단계최소제곱 추정 ⇒ 모수들에 대한 일치 추정량