

제 13 강

계량경제학
13.1

연립방정식 모형 Simultaneous Equations Models

예: 수요공급모형

계량경제학
13.4

구조방정식

$$\text{Demand: } q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d \quad \text{Supply: } q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$$

- 수요함수의 α_1 을 추정함에 있어서, 공급함수의 p 는 q 의 함수로 표현될 수 있고, q 에는 ε_d 가 포함되어 있음
- 일반적으로 연립구조방정식에서의 모수들에 대한 최소제곱추정량은 방정식의 오른쪽에 있는 내생변수들이 오차항과 상관되어 있으므로 해서 비일치(inconsistent) 추정이 됨

연립방정식 모형 -서론

계량경제학
13.2

- 연립방정식모형(Simultaneous equations models)은 일련의 방정식 집합(시스템)으로 이루어짐
- 연립방정식모형을 구성하고 있는 방정식은 둘 혹은 그 이상의 내생변수들을 포함
- 최소제곱추정방법은 연립방정식모형에서는 부적절함

예: 수요공급모형

계량경제학
13.5

축약형(유도) 방정식(reduced form equation)의 도출

$$\text{Demand: } q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d \quad \text{Supply: } q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$$

$$\Rightarrow p = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y - \frac{\beta_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} w + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \equiv \pi_{p1} y + \pi_{p2} w + v_1$$

$$\Rightarrow q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s = \beta_1 \left[\frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y - \frac{\beta_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} w + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \right] + \beta_2 w + \varepsilon_s$$

$$= \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\beta_2 \alpha_1}{(\beta_1 - \alpha_1)} w + \frac{\beta_1 \varepsilon_d - \alpha_1 \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \equiv \pi_{q1} y + \pi_{q2} w + v_2$$

$$\Rightarrow p = \pi_{p1} y + \pi_{p2} w + v_1, \quad q = \pi_{q1} y + \pi_{q2} w + v_2 \quad : \text{축약형 방정식}$$

예: 수요공급모형

계량경제학
13.3

구조방정식

- 구조방정식: 경제 현상에서 관측되는 경제적 변수들 간의 (구조적) 관계를 묘사하는 이론으로부터 도출된 방정식
 - ex. 수요공급모형, 케인지언 모형
- 수요공급모형 (통계적 모형)
 - Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$
 - 상품의 수요량(q)은 가격(p)과 소득(y)의 함수
 - 상품의 공급량(q)은 가격(p)과 요소비용(w)의 함수
 - 균형에서 수요량=공급량=균형거래량(q)과 균형(p)가격이 결정됨
 - q, p : 내생변수, y, w : 외생변수

예: 수요공급모형

계량경제학
13.6

식별의 문제

구조적 모수들: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

축약형 모수들: $\pi_{p1}, \pi_{p2}, \pi_{q1}, \pi_{q2}$

- 축약형 방정식의 모수들은 최소제곱추정을 통한 일치 추정이 가능 (등호 오른쪽 변수들이 모두 외생변수들)
- 식별의 문제는 구조적 모수들에 대한 일치추정이 가능한가 여부에 대한 문제이며, 원래의 구조방정식의 구조적 모수들이 일치 추정되는 축약형 방정식의 축약형 모수들로부터 unique하게 표현되는지를 결정하는 문제로도 볼 수도 있음

예: 수요공급모형 계량경제학 13.7

식별의 문제

$$\pi_{p_1} = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)}, \pi_{p_2} = \frac{\beta_2}{(\beta_1 - \alpha_1)}, \pi_{q_1} = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)}, \pi_{q_2} = \frac{\beta_2 \alpha_1}{(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi_{q_2}}{\pi_{p_2}}, \alpha_2 = \frac{\pi_{p_2} \pi_{q_1} - \pi_{p_1} \pi_{q_2}}{\pi_{p_1}}, \beta_1 = \frac{\pi_{q_1}}{\pi_{p_1}}, \beta_2 = \frac{\pi_{p_2} \pi_{q_1} - \pi_{p_1} \pi_{q_2}}{\pi_{p_2}}$$

- 따라서 이 경우에는 축약형 모수들 $\pi_{p_1}, \pi_{p_2}, \pi_{q_1}, \pi_{q_2}$ 에 대한 일치 추정치로부터, 구조적 모수들: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 의 값을 **unique**하게 대응시킬 수 있음
 - 구조적 모수들이 일치 추정될 수 있음을 의미 - 식별이 됨을 의미

식별의 문제 계량경제학 13.10

과소 식별의 예

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- 이 모형에서 q (수량)와 p (가격)는 내생변수, y (소득)는 외생변수임
- 이러한 수요 공급 모형에서 $M=2$ (내생변수의 수)이며 시스템내의 변수는 p, q 및 y 의 세 개임
- 수요방정식에서는 아무런 변수도 빠져 있지 않으며, 따라서 이 방정식은 과소 식별됨. 즉 그 모수들은 일치추정할 수 없음
- 공급방정식에서는 $M-1=1$, 즉 하나의 변수 y 가 빠져 있으며, 따라서 공급방정식의 모수는 일치 추정이 가능함

식별의 문제 계량경제학 13.8

과소, 정확, 과다 식별

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 표현될 수 없는 경우 방정식은 **과소식별 (under-identified)** 된다고 함

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 Unique하게 표현되는 경우 방정식은 **정확식별 (exactly-identified)** 된다고 함

구조적(행태) 모수들을 축약형 모수들로 표현할 수 있는 해(solution)가 하나 이상인 경우 (but finite) 방정식은 **과다식별 (over-identified)** 된다고 함

식별의 문제 계량경제학 13.11

과소식별의 예

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- Reduced form equation

$$p = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \quad q = \beta_1 p + \varepsilon_s = \beta_1 \left[\frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \right] + \varepsilon_s$$

$$= \pi_1 y + v_1 \quad = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\beta_1 \varepsilon_d - \alpha_1 \varepsilon_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \pi_2 y + v_2$$

$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)}, \pi_2 = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \beta_1 \pi_1$ • 하지만 α_1 와 α_2 는 π_1 와 π_2 에 의해 결정되지 않음

$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_1}$

식별의 문제 계량경제학 13.9

식별의 일반적 조건

M 개의 내생변수들의 값을 결정하는 M 개의 연립방정식으로 구성된 시스템에서 시스템을 구성하는 어떤 한 방정식의 모수들을 일치추정하는 것이 가능하기 위해서는 **적어도 $M-1$ 개의 변수들이 그 방정식에서 빠져 있어야 함**

식별의 문제 계량경제학 13.12

그림을 통한 이해

- 공급방정식에서 빠진 소득 변수를 이용하여 공급곡선을 식별할 수 있음
- 만약 공급함수가 다음과 같이 주어진다면 $q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$
- 수요방정식 역시 빠진 임금변수를 이용하여 수요함수를 식별할 수 있게 됨

식별의 일반조건의 의미

- 연립방정식내의 한 방정식에서 2SLS추정에 필요한 최소한의 도구변수의 수는 방정식의 오른쪽에 있는 내생변수들의 수와 같음
- 연립방정식내의 방정식들에는 전형적으로 오른쪽에 몇 개의 외생변수들이 나타남.
- 도구변수들은 방정식의 오른쪽에서 빠져 있는 외생 변수만을 사용할 수 있음
- 결과적으로 식별은 한 방정식에서 빠져 있는 외생 변수의 수가 적어도 오른쪽에 있는 내생변수의 수만큼 되어야 함을 요구함

2단계최소제곱추정 - 1단계

$$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + v_{t1}$$

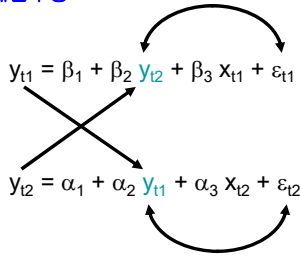
$$y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + v_{t2}$$

최소제곱추정을 통해 예측치를 얻음

$$\hat{y}_{t1} = \hat{\pi}_{11} + \hat{\pi}_{21} x_{t1} + \hat{\pi}_{31} x_{t2}$$

$$\hat{y}_{t2} = \hat{\pi}_{12} + \hat{\pi}_{22} x_{t1} + \hat{\pi}_{32} x_{t2}$$

2단계최소제곱추정



문제: 오른쪽 내생변수들 y_{12} 과 y_{11} 가 오차항들과 상관되어 있음

2단계최소제곱추정 - 2단계

y_{11}, y_{12} 를 예측치로 대체함

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2}$$

각 방정식에 대해 최소제곱추정을 적용하여 2SLS추정치들 구함

$$\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \text{ and } \tilde{\alpha}_3$$

2단계최소제곱추정

해법 : 먼저 축약형 방정식을 도출함

$$\begin{cases} y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \epsilon_{t1} \\ y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \epsilon_{t2} \end{cases}$$

⇒ 즉 두 내생변수 y_{t1}, y_{t2} 들에 대해 방정식을 풀

$$\begin{cases} y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + v_{t1} \\ y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + v_{t2} \end{cases}$$

2단계최소제곱추정 - 정리

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \epsilon_{t1} \quad : \text{구조 방정식}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \epsilon_{t2}$$

$$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + v_{t1} \quad : \text{축약형 방정식}$$

$$y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + v_{t2}$$

1 단계 최소제곱추정 ⇒ $\hat{y}_{t1}, \hat{y}_{t2}$

$$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1}$$

$$y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2}$$

2 단계최소제곱 추정 ⇒ 모수들에 대한 일치 추정량