

연립방정식 모형 - 최소제곱추정의 실패 계량경제학 13.7

연립구조방정식에서의 모수들에 대한 최소제곱추정량은 방정식의 오른쪽에 있는 내생변수들이 오차항과 상관되어 있으므로 해서 **편향되고(biased) 비일치인(inconsistent)** 추정이 됨

연립방정식 모형의 추정 계량경제학 13.8

축약형 (유도) 방정식(reduced form equation)의 도출

$$c_t = \beta_1 + \beta_2 y_t + \varepsilon_t$$

$$y_t = c_t + i_t$$

$$c_t = \beta_1 + \beta_2(c_t + i_t) + \varepsilon_t$$

$$(1 - \beta_2)c_t = \beta_1 + \beta_2 i_t + \varepsilon_t$$

연립방정식 모형의 추정 계량경제학 13.9

축약형방정식의 도출

$$(1 - \beta_2)c_t = \beta_1 + \beta_2 i_t + \varepsilon_t$$

$$c_t = \frac{\beta_1}{(1-\beta_2)} + \frac{\beta_2}{(1-\beta_2)} i_t + \frac{1}{(1-\beta_2)} \varepsilon_t$$

$$c_t = \pi_{11} + \pi_{21} i_t + v_t$$

The Reduced Form Equation

연립방정식 모형의 추정 계량경제학 13.10

축약형방정식의 도출

$$y_t = c_t + i_t$$

where $c_t = \pi_{11} + \pi_{21} i_t + v_t$

$$y_t = \pi_{11} + (1 + \pi_{21}) i_t + v_t$$

$$y_t = \pi_{12} + \pi_{22} i_t + v_t$$

연립방정식 모형 계량경제학 13.11

Keynes의 거시경제 모형 - 축약형방정식

$$c_t = \pi_{11} + \pi_{21} i_t + v_t$$

$$(y_t = \pi_{12} + \pi_{22} i_t + v_t)$$

c_t 와 y_t 가 항등식을 통해 연결되어 있기 때문에 축약형 방정식의 오차항(v_t)이 같지만, 일반적인 경우는 아님

$$\pi_{11} = \pi_{12} = \frac{\beta_1}{(1-\beta_2)}, \quad \pi_{21} = (\pi_{22}-1) = \frac{\beta_2}{(1-\beta_2)}$$

연립방정식 모형 계량경제학 13.12

식별의 문제

구조적 모수들: β_1, β_2 .

축약형 모수들: π_{11}, π_{21} .

일단 유도 방정식의 모수들이 추정되면, 식별의 문제는 원래의 구조방정식의 모수들이 일치 추정되는 축약형 방정식의 모수들로부터 **unique**하게 표현되는지를 결정하는 문제임

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_{11}}{\hat{\pi}_{21} + 1} \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{21} + 1}$$

연립방정식 모형 계량경제학
13.13

식별의 문제

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 표현될 수 없는 경우 방정식은 **과소식별 (under-identified)** 된다고 함

구조적(행태) 모수들이 축약형 모수들에 의해 Unique하게 표현되는 경우 방정식은 **정확식별 (exactly-identified)** 된다고 함

구조적(행태) 모수들을 축약형 모수들로 표현할 수 있는 해(solution)가 하나 이상인 경우 방정식은 **과다식별 (over-identified)** 된다고 함

연립방정식 모형 계량경제학
13.14

식별의 일반적 조건

M 개의 내생변수들의 값을 결정하는 M 개의 연립방정식으로 구성된 시스템에서 시스템을 구성하는 어떤 한 방정식의 모수들을 일치추정하는 것이 가능하기 위해서는 **적어도 $M-1$ 개의 변수들이 그 방정식에서 빠져 있어야 함**

연립방정식 모형 계량경제학
13.15

식별의 문제

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- 이 모형에서 q (수량)와 p (가격)는 내생변수, y (소득)는 외생변수임
- 이러한 수요 공급 모형에서 $M=2$ (내생변수의 수)이며 시스템내의 변수는 p, q 및 y 의 세 개임
- 수요방정식에서는 아무런 변수도 빠져 있지 않으며, 따라서 이 방정식은 과소식별됨. 즉 그 모수들은 일치추정할 수 없음
- 공급방정식에서는 $M-1=1$, 즉 하나의 변수 y 가 빠져 있으며, 따라서 공급방정식의 모수는 일치추정이 가능함

연립방정식 모형 계량경제학
13.16

식별의 문제

Demand: $q = \alpha_1 p + \alpha_2 y + \varepsilon_d$ Supply: $q = \beta_1 p + \varepsilon_s$

- Reduced form equation

$$p = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{e_d - e_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \quad q = \beta_1 p + e_s = \beta_1 \left[\frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{e_d - e_s}{(\beta_1 - \alpha_1)} \right] + e_s$$

$$= \pi_1 y + v_1 \qquad \qquad \qquad = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} y + \frac{\beta_1 e_d - \alpha_1 e_s}{(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$= \pi_2 y + v_2$$

$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)}, \pi_2 = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} = \beta_1 \pi_1$ • 하지만 α_1 와 α_2 는 π_1 와 π_2 에 의해 unique하게 결정되지 않음

$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_1}$

연립방정식 모형 계량경제학
13.17

식별의 문제

- 공급방정식에서 빠진 소득 변수를 이용하여 공급곡선을 식별할 수 있음
- 만약 공급함수가 다음과 같이 달리 주어진다면 $q = \beta_1 p + \beta_2 w + \varepsilon_s$
- 수요방정식 역시 빠진 임금변수를 이용하여 수요함수를 식별할 수 있게 됨

연립방정식 모형 계량경제학
13.18

식별의 문제

- 연립방정식내의 한 방정식에서 2SLS추정에 필요한 도구변수의 수는 방정식의 오른쪽에 있는 내생변수들의 수와 같음
- 연립방정식내의 방정식들에는 전형적으로 오른쪽에 몇 개의 외생변수들이 나타남.
- 도구변수들은 방정식의 오른쪽에서 빠져 있는 외생변수만을 사용할 수 있음
- 결과적으로 식별은 한 방정식에서 빠져 있는 외생변수의 수가 적어도 오른쪽에 있는 내생변수의 수만큼 되어야 함을 요구함

연립방정식 모형의 추정 계량경제학 13.19

2단계최소제곱추정

$$\begin{aligned}
 y_{t1} &= \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1} \\
 y_{t2} &= \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2}
 \end{aligned}$$

문제: 오른쪽 내생변수들 y_{t2} 과 y_{t1} 가 오차항들과 상관되어 있음

연립방정식 모형 계량경제학 13.20

2단계최소제곱추정

해법: 먼저 **축약형 방정식**을 도출함

$$\begin{cases}
 y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1} \\
 y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2}
 \end{cases}$$

⇒ 즉 두 내생변수 y_{t1}, y_{t2} 들에 대해 방정식을 풀

$$\begin{cases}
 y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + v_{t1} \\
 y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + v_{t2}
 \end{cases}$$

연립방정식 모형 계량경제학 13.21

2단계최소제곱추정 - 1단계

$$\begin{aligned}
 y_{t1} &= \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + v_{t1} \\
 y_{t2} &= \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + v_{t2}
 \end{aligned}$$

최소제곱추정을 통해 예측치를 얻음

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{t1} &= \hat{\pi}_{11} + \hat{\pi}_{21} x_{t1} + \hat{\pi}_{31} x_{t2} \\
 \hat{y}_{t2} &= \hat{\pi}_{12} + \hat{\pi}_{22} x_{t1} + \hat{\pi}_{32} x_{t2}
 \end{aligned}$$

연립방정식 모형 계량경제학 13.22

2단계최소제곱추정 - 2단계

$$y_{t1} = \hat{y}_{t1} + \hat{v}_{t1} \quad \text{and} \quad y_{t2} = \hat{y}_{t2} + \hat{v}_{t2}$$

y_{t1}, y_{t2} 를 예측치로 대체함	$ \begin{aligned} y_{t1} &= \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} &= \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2} \end{aligned} $
$ \begin{aligned} y_{t1} &= \beta_1 + \beta_2 (\hat{y}_{t2} + \hat{v}_{t2}) + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} &= \alpha_1 + \alpha_2 (\hat{y}_{t1} + \hat{v}_{t1}) + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2} \end{aligned} $	

연립방정식 모형 계량경제학 13.23

2단계최소제곱추정 - 2단계

y_{t1}, y_{t2} 를 예측치로 대체함	$ \begin{aligned} y_{t1} &= \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1} \\ y_{t2} &= \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2} \end{aligned} $
-----------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

각 방정식에 대해 최소제곱추정을 적용하여 2SLS추정치를 구함

$$\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \text{ and } \tilde{\alpha}_3$$

연립방정식 모형 계량경제학 13.24

2단계최소제곱추정 - 정리

$y_{t1} = \beta_1 + \beta_2 y_{t2} + \beta_3 x_{t1} + \varepsilon_{t1}$: 구조 방정식
 $y_{t2} = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{21} x_{t1} + \pi_{31} x_{t2} + v_{t1}$: 축약형 방정식
 $y_{t2} = \pi_{12} + \pi_{22} x_{t1} + \pi_{32} x_{t2} + v_{t2}$

1 단계 최소제곱추정 ⇒ $\hat{y}_{t1}, \hat{y}_{t2}$

$$\begin{aligned}
 y_{t1} &= \beta_1 + \beta_2 \hat{y}_{t2} + \beta_3 x_{t1} + u_{t1} \\
 y_{t2} &= \alpha_1 + \alpha_2 \hat{y}_{t1} + \alpha_3 x_{t2} + u_{t2}
 \end{aligned}$$

2 단계최소제곱추정 ⇒ 모수들에 대한 일치 추정량