# 제 14 강

# 시차분포모형
# Distributed Lag Models

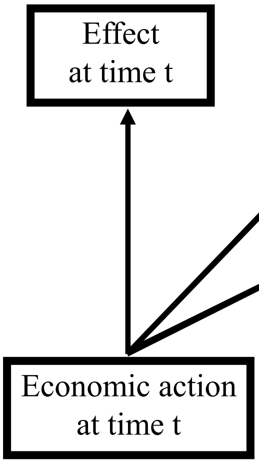


## 시차분포 모형 - 서론

- 경제적 결정들은 상당한 기간동한 지속되는 영향을 낳음
  - 이러한 영향들은 즉시 나타나지 않고 미래의 기간들에 걸쳐 분포(distributed)되거나 혹은 펼쳐짐
  - t라는 시점에서 이루어진 경제적 행위들 혹은 결정들은 t시점에서 경제에 영향을 주고 t+1기, t+2기,,, 등에도 역시 영향을 줌

## 시차분포 모형 - 서론






## 시차분포 모형 - 서론



- 정책변수 $x_t$ 에서의 변화가 다음의 경제적 결과들에 영향을 주는 것으로 묘사될 수 있음

$$y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \cdots$$

  - 이를 살짝 달리 보면, $y_t$ 가 $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots,$ 의 값들에 의해 영향을 받는 것으로 묘사될 수 있음. 즉

$$y_t = f(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots)$$

    : 시간의 흐름에 따른 경제의 변화와 그 반응을 묘사하는 *동태적 모형(Dynamic Model)*

  - 무한 시차분포모형(*Infinite distributed lag* models) vs. 유한시차분포모형(*finite distributed lag* models)

## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



**Unstructured Lags**

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \cdots + \beta_n x_{t-n} + \varepsilon_t, \quad t = n+1, \ldots, T$$

: β들에 대해 아무런 구조가 전제되지 않음
: β들에 대해 제약이 없음(unrestricted)

- 문제점
  - n개의 시차를 도입함에 따라 n 개의 관측치가 소실됨
  - $x_{t-i}$들간에 높은 수준의 다중 공선성
  - n이 클 경우 자유도의 손실이 큼

## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



**Unstructured Lags**

- 공선성은 이러한 모형들에 있어서 종종 심각한 문제임
  - 공선성으로 인해 최소제곱추정의 표준오차가 커지게 되어, 구간추정치가 넓어지고, 계수들은 통계적으로 유의성이 없는 것으로 나타나며 모형설정의 변화나 관측치의 변화에 결과가 매우 민감하게 반응하게 됨
  - 이러한 결과들은 최소제곱추정 결과가 신뢰기 힘들 수 있음을 의미함

- 시차분포에 대해 어떤 양태(shape)을 부과함에 의해 공선성으로 인한 효과를 감쇄시킬 수 있음

## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형

### 산술적 시차분포

- Proposed by Irving Fisher (1937)
  - the lag weights decline linearly
  - Imposing the relationship:

$$\beta_i = (n - i + 1)\ \gamma$$

  - only need to estimate one coefficient, $\gamma$ , instead of n+1 coefficients, $\beta_0$ , ... , $\beta_n$ .

  : $\beta$'s are restricted

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (n+1)\ \gamma \\ \beta_1 &= n\ \gamma \\ \beta_2 &= (n-1)\ \gamma \\ \beta_3 &= (n-2)\ \gamma \\ &\ \ \vdots \\ \beta_{n-2} &= 3\ \gamma \\ \beta_{n-1} &= 2\ \gamma \\ \beta_n &= \gamma \end{aligned}$$



## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형

### 산술적 시차분포

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_n x_{t-n} + \varepsilon_t$$

Step 1: impose the restriction: $\beta_i = (n - i + 1)\ \gamma$

$$y_t = \alpha + (n+1)\ \gamma x_t + n\ \gamma x_{t-1} + (n-1)\ \gamma x_{t-2} + \ldots + \gamma x_{t-n} + \varepsilon_t$$

Step 2: factor out the unknown coefficient, $\gamma$ .

$$y_t = \alpha + \gamma\ [(n+1)x_t + nx_{t-1} + (n-1)x_{t-2} + \ldots + x_{t-n}] + \varepsilon_t$$

## *시차분포 모형 – 유한 시차분포모형*



### 산술적 시차분포

$$y_t = \alpha + \gamma\,[(n+1)x_t + nx_{t-1} + (n-1)x_{t-2} + \ldots + x_{t-n}] + \varepsilon_t$$

**Step 3: Define $z_t$ .**

$$z_t = [(n+1)x_t + nx_{t-1} + (n-1)x_{t-2} + \ldots + x_{t-n}]$$

**Step 4: Decide number of lags, n.**

For n = 4: $z_t = [\,5x_t + 4x_{t-1} + 3x_{t-2} + 2x_{t-3} + x_{t-4}]$

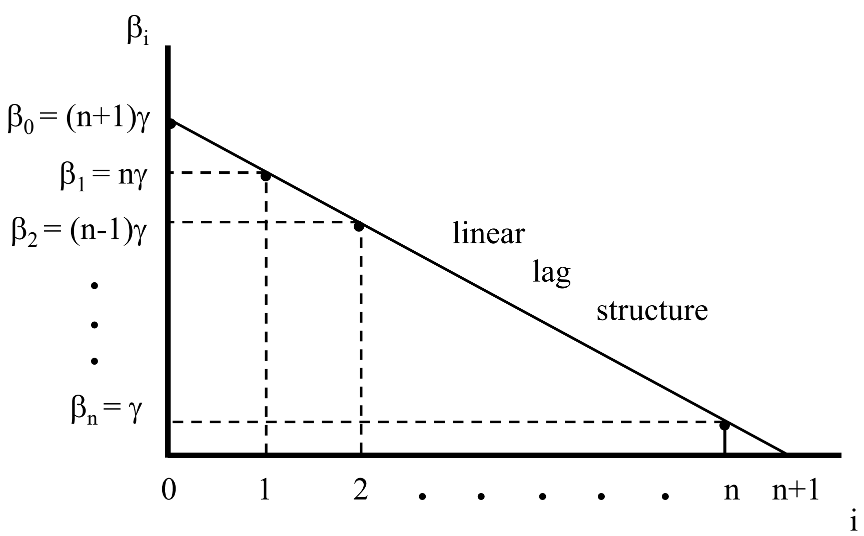
**Step 5: Run least squares regression on:**

$$y_t = \alpha + \gamma\, z_t + \varepsilon_t$$

## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



### 산술적 시차분포



## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



### 다항 시차분포

- Proposed by Shirley Almon (1965)
  - the lag weights fit a polynomial

n = the length of the lag
p = degree of polynomial

$$\beta_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + \gamma_2 i^2 + \ldots + \gamma_p i^p \qquad \text{where } i = 1, \ldots, n$$

For example, a quadratic polynomial:

$$\beta_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + \gamma_2 i^2$$

where $i = 1, \ldots, n$
$p = 2$ and $n = 4$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \gamma_0 \\
\beta_1 &= \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \\
\beta_2 &= \gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2 \\
\beta_3 &= \gamma_0 + 3\gamma_1 + 9\gamma_2 \\
\beta_4 &= \gamma_0 + 4\gamma_1 + 16\gamma_2
\end{aligned}$$

## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



### 다항 시차분포

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \beta_4 x_{t-4} + \varepsilon_t$$

Step 1: impose the restriction: $\beta_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + \gamma_2 i^2$

$$\begin{aligned}
y_t = \alpha &+ \gamma_0 x_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)x_{t-1} + (\gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\gamma_2)x_{t-2} \\
&+ (\gamma_0 + 3\gamma_1 + 9\gamma_2)x_{t-3} + (\gamma_0 + 4\gamma_1 + 16\gamma_2)x_{t-4} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Step 2: factor out the unknown coefficients: $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$.

$$\begin{aligned}
y_t = \alpha &+ \gamma_0 [x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + x_{t-4}] \\
&+ \gamma_1 [x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + 4x_{t-4}] \\
&+ \gamma_2 [x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + 16x_{t-4}] + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

# 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



## 다항 시차분포

$$y_t = \alpha + \gamma_0 [x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + x_{t-4}] + \gamma_1 [x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + 4x_{t-4}] + \gamma_2 [x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + 16x_{t-4}] + \varepsilon_t$$

Step 3: Define $z_{t0}$, $z_{t1}$ and $z_{t2}$ for $\gamma_0$, $\gamma_1$, and $\gamma_2$.

$$z_{t0} = [x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + x_{t-4}]$$

$$z_{t1} = [x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + 4x_{t-4}]$$

$$z_{t2} = [x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + 16x_{t-4}]$$

# 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



## 다항 시차분포

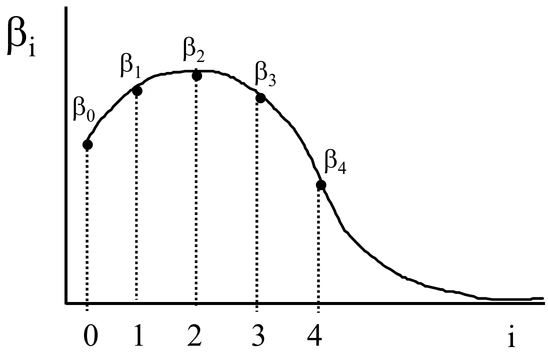
Step 4: Regress $y_t$ on $z_{t0}$, $z_{t1}$ and $z_{t2}$ .

$$y_t = \alpha + \gamma_0 z_{t0} + \gamma_1 z_{t1} + \gamma_2 z_{t2} + \varepsilon_t$$

Step 5: Express $\hat{\beta}_i$'s in terms of $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\gamma}_1$, and $\hat{\gamma}_2$.

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= \hat{\gamma}_0 \\
\hat{\beta}_1 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 \\
\hat{\beta}_2 &= \hat{\gamma}_0 + 2\hat{\gamma}_1 + 4\hat{\gamma}_2 \\
\hat{\beta}_3 &= \hat{\gamma}_0 + 3\hat{\gamma}_1 + 9\hat{\gamma}_2 \\
\hat{\beta}_4 &= \hat{\gamma}_0 + 4\hat{\gamma}_1 + 16\hat{\gamma}_2
\end{aligned}$$

## 다항 시차분포






## 유한시차 길이의 선택

- 유한 시차분포 모형에서 시차 n을 선택하는 여러 가지 방법들이 제시되어 왔음
- 적합도(goodness-of-fit ) 기준에 바탕을 둔 두 가지 방법을 소개
- 우선 고려하고자 하는 최대 시차 $N$ 을 선택 →제약이 없는 유한 시차모형은 다음 과 같이 주어짐

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \cdots + \beta_N x_{t-N} + \varepsilon_t$$

## 시차분포 모형 – 유한 시차분포모형



### 유한시차 길이의 선택

- $n \le N$ 인 시차들에 대해 모형의 적합도를 평가하고자 함
- 통상적인 적합도 척도인 $R^2$ 혹은 조절된 $R^2$는 이러한 작업해 적절하지 않음이 알려져 있음
- 이러한 작업에 보다 적절한 적합도 척도들은

$$AIC = \ln \frac{SSE_n}{T-N} + \frac{2(n+2)}{T-N} \qquad \text{: Akaike's } AIC \text{ criterion}$$

$$SC(n) = \ln \frac{SSE_n}{T-N} + \frac{(n+2)\ln(T-N)}{T-N} \qquad \text{: Schwarz's } SC \text{ criterion}$$

- 이들 각각의 척도들로 부터 해당 척도들을 최소화하는 $n^*$ 를 찾음

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형



### 기하시차

infinite distributed lag model:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$$

$$y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

기하시차구조(geometric lag structure):

$$\beta_i = \beta \phi^i \qquad \text{where } |\phi| < 1 .$$

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형



### 기하시차

infinite unstructured lag:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \ldots + \varepsilon_t$$

$$\boxed{\text{Substitute } \beta_i = \beta \phi^i}$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta \\ \beta_1 &= \beta \phi \\ \beta_2 &= \beta \phi^2 \\ \beta_3 &= \beta \phi^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

infinite geometric lag:

$$y_t = \alpha + \beta(x_t + \phi x_{t-1} + \phi^2 x_{t-2} + \phi^3 x_{t-3} + \ldots) + \varepsilon_t$$

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형



### 기하시차

$$y_t = \alpha + \beta(x_t + \phi x_{t-1} + \phi^2 x_{t-2} + \phi^3 x_{t-3} + \ldots) + \varepsilon_t$$

단기승수(impact multiplier) :

$$\beta$$

중기승수(interim multiplier (3-period)) :

$$\beta + \beta \phi + \beta \phi^2$$

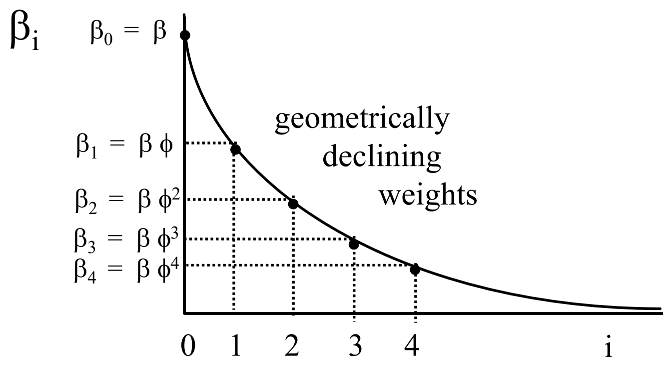
장기승수(long-run multiplier) :

$$\beta(1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \ldots) = \frac{\beta}{1-\phi}$$

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형



### 기하시차




## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형



### 기하시차 : 코익변환

$$y_t = \alpha + \beta(x_t + \phi\, x_{t-1} + \phi^2\, x_{t-2} + \phi^3\, x_{t-3} + \ldots) + e_t$$

Problem:

How to estimate the infinite number of geometric lag coefficients ???

Answer:

Use the Koyck transformation.

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형

계량경제학
14.23

### 기하시차 : 코익변환

Lag everything once, multiply by $\phi$ and subtract from original:

$$y_t = \alpha + \beta(x_t + \phi\, x_{t-1} + \phi^2\, x_{t-2} + \phi^3\, x_{t-3} + \ldots) + \varepsilon_t$$

$$\phi\, y_{t-1} = \phi\alpha + \beta(\phi\, x_{t-1} + \phi^2\, x_{t-2} + \phi^3\, x_{t-3} + \ldots) + \phi\, \varepsilon_{t-1}$$

$$y_t - \phi\, y_{t-1} = \alpha(1-\phi) + \beta x_t + (\varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1})$$

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형

계량경제학
14.24

### 기하시차 : 코익변환

$$y_t - \phi\, y_{t-1} = \alpha(1-\phi) + \beta x_t + (\varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1})$$

Solve for $y_t$ by adding $\phi\, y_{t-1}$ to both sides:

$$y_t = \alpha(1-\phi) + \phi\, y_{t-1} + \beta x_t + (\varepsilon_t - \phi\varepsilon_{t-1})$$

$$y_t = \delta_1 + \delta_2\, y_{t-1} + \delta_3 x_t + \nu_t$$

**기하시차 : 코익모형 추정**

$$y_t = \delta_1 + \delta_2 y_{t-1} + \delta_3 x_t + v_t$$

- 이 모형은 다중회귀모형처럼 보이지만, 두 가지 특징을 갖고 있음
  - 첫째는 설명변수 중 하나가 시차종속변수 $y_{t-1}$ 인 것임
  - 둘째는 오차항 $v_t$ 가 $\varepsilon_t$와 $\varepsilon_{t-1}$ 에 의존하는 것임
- 결과적으로, $y_{t-1}$ 이 직접적으로 $\varepsilon_{t-1}$ 에 의존하기 때문에 $y_{t-1}$ 과 오차항 $v_t$ 는 상관되어 있으며,
  - 이에 대한 최소제곱 추정은 비일치 추정임



**기하시차 : 코익모형 추정: 2SLS**

- $y_{t-1}$ 에 대한 적절한 도구 변수는 $x_{t-1}$임.
  - $y_{t-1}$ 와는 상관되어 있으나 오차항 $v_t$ 와는 상관되어 있지 않음(외생변수임).
- 2단계 최소제곱 추정을 통해 코익모형에 대한 추정이 이루어질 수 있음
  - $y_{t-1}$ 을 $\hat{y}_{t-1} = a_0 + a_1 x_{t-1}$ 으로 대체 (계수 $a_0$ 와 $a_1$ 은 $y_{t-1}$를 $x_{t-1}$, 에 대해 회귀하여 얻어진 최소제곱 추정치들임)

$$y_t = \delta_1 + \delta_2 \hat{y}_{t-1} + \delta_3 x_t + v_t$$

  - 이 식에 대해 최소제곱 추정을 적용하여 일치추정 결과를 얻음

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형



### 기하시차 : 코익모형 추정: 2SLS

$$y_t = \delta_1 + \delta_2 y_{t-1} + \delta_3 x_t + \nu_t$$

$$\boxed{\delta_1 = \alpha(1-\phi)\,, \quad \delta_2 = \phi\,, \text{ and } \quad \delta_3 = \beta,}$$

The original structural parameters can now be estimated in terms of these reduced form parameter estimates.

$$\hat{\beta} = \hat{\delta}_3$$

$$\hat{\phi} = \hat{\delta}_2$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\delta}_1 / (1-\hat{\delta}_2)$$

## 시차분포 모형 – 무한 시차분포모형



### 기하시차 : 코익모형 추정: 2SLS

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_t + \hat{\phi}\, x_{t-1} + \hat{\phi}^2\, x_{t-2} + \hat{\phi}^3\, x_{t-3} + \ldots) + \hat{\varepsilon}_t$$

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}$$

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}\,\hat{\phi}$$

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}\,\hat{\phi}^2$$

$$\hat{\beta}_3 = \hat{\beta}\,\hat{\phi}^3$$

$$\vdots$$

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_0\, x_t + \hat{\beta}_1\, x_{t-1} + \hat{\beta}_2\, x_{t-2} + \hat{\beta}_3\, x_{t-3} + \ldots + \hat{\varepsilon}_t$$

## 시차분포 모형 – 자기상관 검정

$$y_t = \delta_1 + \delta_2 y_{t-1} + \delta_3 x_t + \nu_t$$

- 코익 변환이 아닌 다른 이유로 위와 같은 모형을 추정하고자 하고, 따라서 시차종속변수와 오차항 간의 상관 여부를 알지 못하는 경우.
  – 상관이 되어 있지 않다면 최소제곱을 사용할 수도 있음

- 핵심적인 문제는 오차항, $\nu_t$에 자기상관이 존재 하느냐의 여부임. 자기 상관이 존재한다면 오차항은 $y_{t-1}$ 과도 상관됨



## 시차분포 모형 – 자기상관 검정

LM test of autocorrelation

| |
|---|
| Durbin-Watson test is biased in favor of no autocorrelation. |

$$y_t = \delta_1 + \delta_2 y_{t-1} + \delta_3 x_t + \nu_t \Rightarrow \text{Get } \hat{\nu}_{t-1} \text{ by LS}$$

$$y_t = \delta_1 + \delta_2 y_{t-1} + \delta_3 x_t + \rho\hat{\nu}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$\Rightarrow$ Get $\hat{\rho}$ by LS and test significance of this estimated parameter

## 시차분포 모형 – 자기상관 검정



### Durbin's h-test for autocorrelation

$$h = \left(1 - \frac{d}{2}\right)\sqrt{\frac{T-1}{1-(T-1)[se(\delta_2)]^2}}$$

h = Durbin's h-test statistic

d = Durbin-Watson test statistic

T = sample size

$se(\delta_2)$ = standard error of the estimate $\delta_2$

- In large samples the *h*-statistic has a standard normal distribution if $v_t$ is not autocorrelated.

## 시차분포 모형



### 자기회귀시차분포모형(ARDL)

- 자기회귀시차분포모형(autoregressive-distributed lag (ARDL) model)은 유연하면서도 추정모수의 수를 줄여준 무한 시차모형
- ARDL 의 예:

$$y_t = \mu + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

  - 이는 ARDL(1,1)로 표기됨: y에 대한 시차 하나와 x에 대한 시차를 하나 포함함을 의미
  - $y$에 대한 $p$ 개의 시차와 $x$ 에 대한 $q$개의 시차를 갖는 경우 ARDL($p$,$q$)로 표기함

- 오차항 $\varepsilon$에 대한 통상적 가정이 충족된다면 모수들은 최소제곱추정에 의해 추정될 수 있음