제 15 강

추가 주제들 - 시계열
Further Topics - Time series

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

정상성(Stationarity)

(약)정상성:
정상시계열은 그 평균과 분산 그리고 자기공분산 함수가 시간의 변화에도 불구하고 일정한 시계열임

i) $E(y_t)=\mu$
ii) $\mathrm{var}(y_t)=\sigma^2$
iii) $\mathrm{cov}(y_t, y_{t+s})=\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s})=\gamma_s$

- 백색잡음과정 (white noise process : WNP)

  $E(y_t)=0, \quad \mathrm{var}(y_t)=\sigma^2, \quad \mathrm{cov}(y_t, y_{t+s})=\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s})=0$

- AR(1): $y_t=\alpha+\rho y_{t-1}+v_t, \; v_t \sim WNP$

  $|\rho|<1 \rightarrow$ stationary! Why?

- 강정상성(strict stationarity)

  모든 적률이 시간에 무관하게 일정

정상성(Stationarity)

비정상성:
비정상 시계열은 그 평균이나 분산 또는 자기공분산 함수가 시간의 변화에 따라 변화는 시계열임

- 상향 추세 또는 하향 추세를 갖는 시계열은 비정상 시계열임
- 임의보행과정(random walk process: RWP):

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + v_t,\ v_t \sim WNP$$

$\rho=1$, $\alpha=0$ → 상수항 또는 추세 없는 임의보행과정(random walk without a drift), 순수 임의보행과정

$\rho=1$, $\alpha\neq0$ → 상수항 또는 추세 갖는 임의보행과정 (random walk with a drift) : 확률적 추세(stochastic trend)를 갖는다
$\alpha>0$: 상방 확률적 추세, $\alpha<0$: 하방 확률적 추세

정상성(Stationarity)

대부분의 비정상 경제 시계열은 임의보행과정이거나 임의보행과정에 확정적 추세(deterministic trend)가 혼합된 시계열로 설명될 수 있다.

1) $y_t = y_{t-1} + v_t,\ v_t \sim WNP$

2) $y_t = \alpha + y_{t-1} + v_t,\ v_t \sim WNP$

3) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + y_{t-1} + v_t,\ v_t \sim WNP$

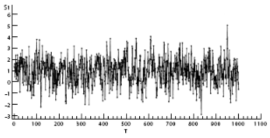
($y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + y_{t-1} + v_t,\ v_t \sim WNP$: rare specification)

- 대부분의 비정상 경제 시계열은 1), 2), 3) 중에 하나로 만들어지는 것으로 간주될 수 있음

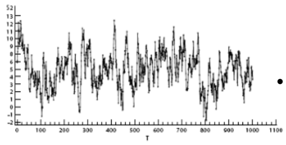
시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

AR(1) 과정

$y_t = 0.5 + 0.5\, y_{t-1} + e_t$, $e_t \sim$ iid N(0,1)

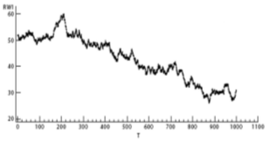


$y_t = 0.5 + 0.9\, y_{t-1} + e_t$

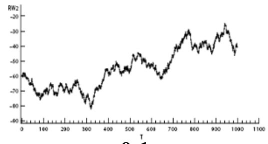


- 정상시계열

$y_t = y_{t-1} + 0.5 e_t$, $e_t \sim$ iid N(0,1)

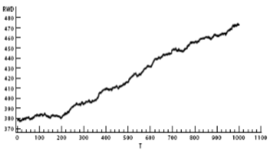


$y_t = y_{t-1} + e_t$,

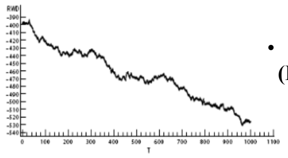


- 비정상시계열
(RWP w/o a drift)

$y_t = 0.1 + y_{t-1} + 0.5 e_t$, $e_t \sim$ iid N(0,1)



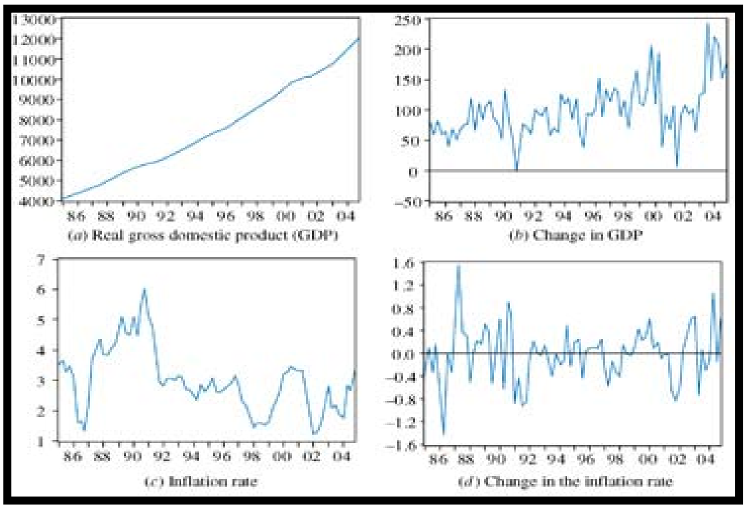
$y_t = -0.1 + y_{t-1} + e_t$,



- 비정상시계열
(RWP with a drift)

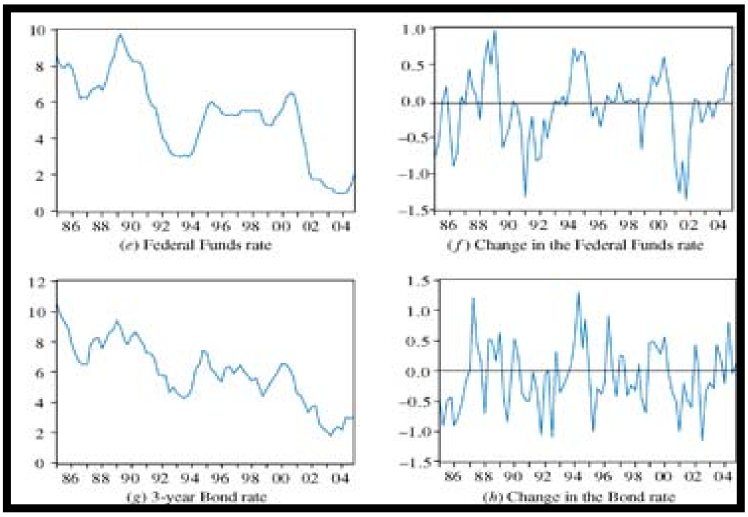
시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

Economic time series 1



(a) Real gross domestic product (GDP)
(b) Change in GDP
(c) Inflation rate
(d) Change in the inflation rate

Economic time series 2



추세정상 vs. 차분정상

차분을 통해 정상 시계열이 되는 경우 이를 차분 정상 시계열이라고 함

1) $y_t = y_{t-1} + v_t, \quad \rightarrow \Delta y_t = v_t$

2) $y_t = \alpha + y_{t-1} + v_t, \quad \rightarrow \Delta y_t = \alpha + v_t$

확정적 추세의 제거(detrend)를 통해 정상 시계열이 되는 경우 이를 추세 정상 시계열이라고 함

3) $\rightarrow \Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + v_t, \quad \rightarrow \Delta y_t - \alpha_0 - \alpha_1 t = v_t$

누적 과정(Integrated Process)

대부분의 비정상 시계열들은 한 번 또는 그 이상의 차분을 취해주면 정상 시계열이 됨

Such time series are called integrated processes.

The number of times a series must be differenced to make it stationary is the order of the integrated process, d. $\Rightarrow$ I(d)

단위근 검정(Unit root test) : Dickey Fuller test (DF Test)

1) $y_t = \rho y_{t-1} + v_t$

$\rightarrow y_t - y_{t-1} = \rho y_{t-1} - y_{t-1} + v_t$

$\rightarrow \Delta y_t = (\rho - 1) y_{t-1} + v_t$

$\rightarrow \Delta y_t = \gamma y_{t-1} + v_t$

2) $\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + v_t$

3) $\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + v_t$

$$H_0: \rho = 1 \quad \leftrightarrow \quad H_0: \gamma = 0$$
$$H_1: \rho < 1 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \gamma < 0$$

단위근 검정(Unit root test) : Dickey Fuller test (DF Test)

타우(τ)검정통계량:

γ에 대한 t값을 디키-풀러(DF) 검정통계량 또는 타우(τ) 검정통계량이라 하며, Dickey-Fuller가 이 타우통계량에 대한 임계값(critical value)을 Monte Carlo실험을 통해 계산하여 표로 제시함

Critical Values for the Dickey–Fuller Test

Model	1%	5%	10%
$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + v_t$	–2.56	–1.94	–1.62
$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + v_t$	–3.43	–2.86	–2.57
$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + v_t$	–3.96	–3.41	–3.13
Standard critical values	–2.33	–1.65	–1.28

Augmented Dickey Fuller test (ADF Test)

ADF(Augmented DF) 검정:
오차항이 계열상관 되어 있을 경우 이를 고려하기 위해 고안된 다음과 같은 모형 설정으로부터 이루어지는 단위근 검정을 ADF검정이라고 함

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} a_i \Delta y_{t-i} + v_t \qquad \Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} a_i \Delta y_{t-i} + v_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} a_i \Delta y_{t-i} + v_t$$

- 증대된 항의 개수(m)는 오차항의 계열 상관이 없어지기 충분한 정도로 결정함
- γ =0에 대한 ADF검정은 DF검정과 동일한 극한 분포를 가지며, 따라서 동일한 임계값을 사용함

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

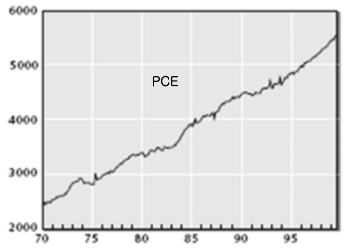
(A)DF test example

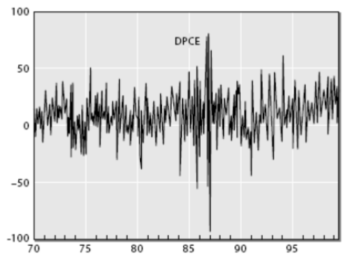
$$\Delta \hat{PCE}_t = -1.5144 + .0030 PCE_{t-1}$$
(tau) (-0.349) (2.557)

$$\Delta \hat{PCE}_t = 2.0239 + 0.0152t + 0.0013 PCE_{t-1}$$
(tau) (0.1068) (0.1917) (0.1377)

$$\Delta \hat{PCE}_t = -2.111 + 0.00397 PCE_{t-1} - 0.2503 \Delta PCE_{t-1} - 0.0412 \Delta PCE_{t-2}$$
(tau) (− 0.4951) (3.3068) (− 4.6594) (− 0.7679)

$$\Delta D\widehat{PCE}_t = -0.9969 DPCE_{t-1}$$
(tau) (− 18.668)





시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

허구적(or 가성)회귀(Spurious Regressions)

허구적 회귀:
회귀분석에 있어서 비정상 시계열 자료를 사용할 경우 아무런 관련 없는 변수들간에 매우 유의한 것처럼 보이는 결과를 얻을 수 있으며, 이러한 회귀를 허구적 회귀 또는 가성 회귀라고 하며, 이 경우 그 모수는 해석 가능한 의미를 갖지 않는다.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

x_t 와 y_t 가 I(1) 시계열일 경우, 통상 ε_t 역시 I(1) 일 것으로 기대할 수 있는데, 실제로 ε_t 가 I(1)일 경우 이는 허구적 회귀임.

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

허구적(or 가성) 회귀(Spurious Regressions)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

$$\text{where} \quad \varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \nu_t$$

If $\theta_1 = 1$ least squares estimates of β_2 may appear highly significant even when true $\beta_2 = 0$.

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

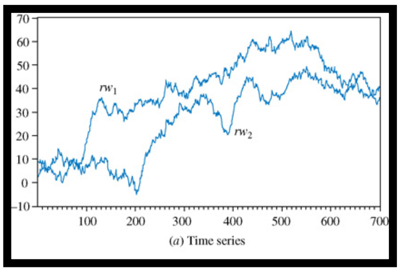
허구적회귀(Spurious Regressions): 예시

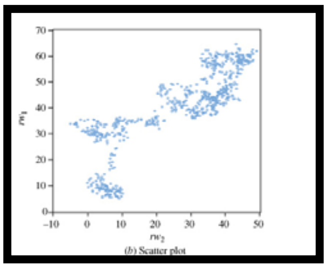
$rw_1: \ y_t = y_{t-1} + v_{1t}$

$rw_2: \ x_t = x_{t-1} + v_{2t}.$

$$\rightarrow \widehat{rw_{1t}} = 17.818 + 0.842\, rw_{2t}, \quad R^2 = .70$$
$$(t) \qquad\qquad (40.837)$$

$v_{1t} \perp v_{2t}.$





공적분(Cointegration)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

x_t 와 y_t 가 I(1) 시계열일 경우, ε_t가 I(1)인 경우 허구적 회귀임.

하지만, ε_t 가 I(0)가 되는 흥미로운 경우가 있으며, 이 때 x_t 와 y_t 는 공적분 되어있다(**cointegrated**)라고 하며, 이 경우 위 회귀식은 공적분 회귀로서, 그 모수는 해석가능한 의미를 갖는다.

공적분(Cointegration)

I(1) 시계열 변수들이 공적분되어 있다는 것은, 경제학적으로 볼 때, 이들 변수들 사이에 장기적 균형 관계가 존재함을 의미하며, 공적분 관계를 만들어내는 계수(coefficient)를 공적분 계수 혹은 공적분 벡터라고 함

Ex) PPP 이론 : 환율과 물가수준의 비

공적분(Cointegration) 검정

EG 검정:
회귀식으로부터의 잔차에 대해 DF 또는 ADF 검정을 적용하는 방법 : (Engle-Granger(EG) 혹은 Augmented Engle-Granger(AEG) 검정이라고 함)

오차항이 관측되지 않으므로 잔차를 기반으로 통계치가 계산됨으로 인해 앞서의 (A)DF의 임계치는 부적절하며, Engle and Granger(1987) 가 임계치를 계산하였음

공적분(Cointegration): 예시

$$PCE_t = \beta_1 + \beta_2 PDI_t + \varepsilon_t,\ PCE_t \sim I(1), PDI_t \sim I(1)$$

$$\hat{PCE}_t = -171.4412 + 0.9672 PDI_t$$

(t-stats) (-7.4808) (119.8712) $R^2 = 0.9940$ $d = 0.5316$

$$\Delta\hat{\varepsilon}_t = -0.2753\hat{\varepsilon}_{t-1}$$

(tau) (-3.7791)

이 경우 Engle and Granger의 1% 임계치는 -2.5899이며, 따라서 위 회귀식은 공적분 회귀이고, 추정계수 0.9672는 장기적 혹은 균형 한계소비성향으로 해석됨

오차수정모형 (Error Correction Model)

x_t 와 y_t 가 공적분되어 있다면, 변수의 단기적 변화를 전기의 장기적 균형으로부터의 이탈에 연계시키는 다음의 식이 성립한다. : Granger's Representation Theorem.

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 (y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 x_{t-1}) + \nu_t$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 \varepsilon_{t-1} + \nu_t$$

오차수정모형 (Error Correction Model)

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 (y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 x_{t-1}) + \nu_t$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 \varepsilon_{t-1} + \nu_t$$

ε_{t-1} : 공적분 회귀로부터의 오차항(균형오차)의 1기 과거 값

t-1기에서 t기 사이의 y_t의 변화가 같은 기간의 x_t의 변화에 대한 즉시적인 조정과 t-1기의 균형오차에 대한 조정을 포함하고 있음

균형오차의 조정으로 나타내는 항(α_3)을 오차수정항이라 하는데, 이는 –일 것으로 기대되며, 그 절대값의 크기는 균형으로 얼마나 빨리 회복되는가를 나타냄

오차수정모형 (Error Correction Model) : 예시

$$\Delta \hat{PCE}_t = 11.6918 + 0.2906 \Delta DPI_t - 0.0867 \hat{\varepsilon}_{t-1}$$

(t-stats) (5.3249) (4.1717) (-2.6003)

$$R^2 = 0.1717 \quad d = 1.9233$$

실제로는 $\hat{\varepsilon}_{t-1} = PCE_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 PDI_{t-1}$ 를 사용

0.2906은 단기적 소비성향으로 해석할 수 있음