

계량경제학
15.1

제 15 강

추가 주제들 - 시계열 Further Topics - Time series

계량경제학
15.2

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

정상성(Stationarity)

(약)정상성:
정상시계열은 그 평균과 분산 그리고 자기공분산 함수가 시간의 변화에도 불구하고 일정한 시계열임

- i) $E(y_t) = \mu$
- ii) $\text{var}(y_t) = \sigma^2$
- iii) $\text{cov}(y_t, y_{t+i}) = \text{cov}(y_t, y_{t-i}) = \gamma_i$

- 백색잡음과정 (white noise process : WNP)
 $E(y_t) = 0, \text{var}(y_t) = \sigma^2, \text{cov}(y_t, y_{t+i}) = \text{cov}(y_t, y_{t-i}) = 0$
- AR(1): $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + v_t, v_t \sim \text{WNP}$
 $|\rho| < 1 \rightarrow \text{stationary! Why?}$
- 강정상성(strict stationarity)
모든 적률이 시간에 무관하게 일정

계량경제학
15.3

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

정상성(Stationarity)

비정상성:
비정상 시계열은 그 평균이나 분산 또는 자기공분산 함수가 시간의 변화에 따라 변화는 시계열임

- 상향 추세 또는 하향 추세를 갖는 시계열은 비정상 시계열임
- 임의보행과정(random walk process: RWP):
 $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + v_t, v_t \sim \text{WNP}$
 $\rho = 1, \alpha = 0 \rightarrow$ 상수항 또는 추세 없는 임의보행과정(random walk without a drift), 순수 임의보행과정
 $\rho = 1, \alpha \neq 0 \rightarrow$ 상수항 또는 추세 갖는 임의보행과정 (random walk with a drift) : 확률적 추세(stochastic trend)를 갖는다
 $\alpha > 0$: 상방 확률적 추세, $\alpha < 0$: 하방 확률적 추세

계량경제학
15.4

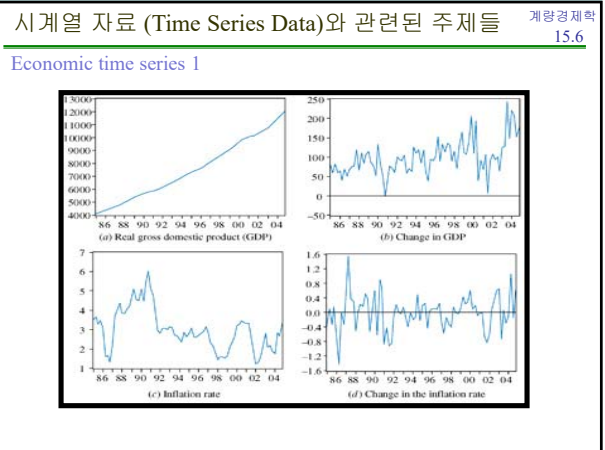
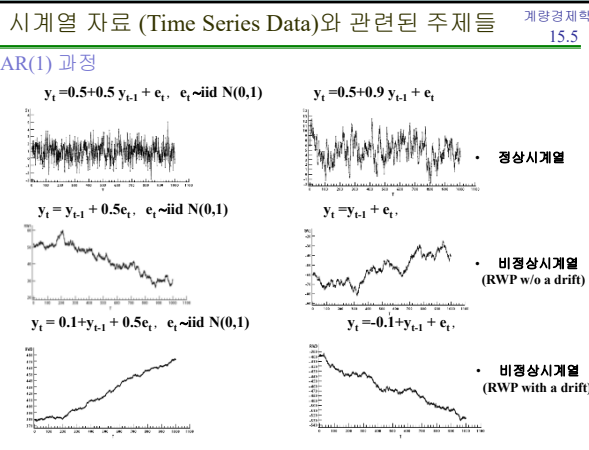
시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들

정상성(Stationarity)

대부분의 비정상 경제 시계열은 임의보행과정이거나 임의보행과정에 확정적 추세(deterministic trend)가 혼합된 시계열로 설명될 수 있다.

- 1) $y_t = y_{t-1} + v_t, v_t \sim \text{WNP}$
- 2) $y_t = \alpha + y_{t-1} + v_t, v_t \sim \text{WNP}$
- 3) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + y_{t-1} + v_t, v_t \sim \text{WNP}$
($y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + y_{t-1} + v_t, v_t \sim \text{WNP}$: rare specification)

- 대부분의 비정상 경제 시계열은 1), 2), 3) 중에 하나로 만들어지는 것으로 간주될 수 있음



시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들 계량경제학 15.7

Economic time series 2

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들 계량경제학 15.8

추세정상 vs. 차분정상

차분을 통해 정상 시계열이 되는 경우 이를 차분 정상 시계열이라고 함

1) $y_t = y_{t-1} + v_t \rightarrow \Delta y_t = v_t$
 2) $y_t = \alpha + y_{t-1} + v_t \rightarrow \Delta y_t = \alpha + v_t$

확정적 추세의 제거(detrend)를 통해 정상 시계열이 되는 경우 이를 추세 정상 시계열이라고 함

3) $\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + v_t \rightarrow \Delta y_t - \alpha_0 - \alpha_1 t = v_t$

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들 계량경제학 15.9

누적 과정(Integrated Process)

대부분의 비정상 시계열들은 한 번 또는 그 이상의 차분을 취해주면 정상 시계열이 됨

Such time series are called **integrated** processes.

The number of times a series must be differenced to make it stationary is the order of the integrated process, $d \Rightarrow I(d)$

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들 계량경제학 15.10

단위근 검정(Unit root test) : Dickey Fuller test (DF Test)

1) $y_t = \rho y_{t-1} + v_t$
 $\rightarrow y_t - y_{t-1} = \rho y_{t-1} - y_{t-1} + v_t$ 2) $\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + v_t$
 $\rightarrow \Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + v_t$
 $\rightarrow \Delta y_t = \gamma y_{t-1} + v_t$ 3) $\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + v_t$

$H_0: \rho = 1 \leftrightarrow H_0: \gamma = 0$
 $H_1: \rho < 1 \leftrightarrow H_1: \gamma < 0$

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들 계량경제학 15.11

단위근 검정(Unit root test) : Dickey Fuller test (DF Test)

타우(τ)검정통계량:

γ 에 대한 t값을 디키-풀러(DF) 검정통계량 또는 타우(τ) 검정통계량이라 하며, Dickey-Fuller가 이 타우통계량에 대한 임계값(critical value)을 Monte Carlo 실험을 통해 계산하여 표로 제시함

| Model | 1% | 5% | 10% |
|---|-------|-------|-------|
| $\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + v_t$ | -2.56 | -1.94 | -1.62 |
| $\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + v_t$ | -3.43 | -2.86 | -2.57 |
| $\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + v_t$ | -3.96 | -3.41 | -3.13 |
| Standard critical values | -2.33 | -1.65 | -1.28 |

시계열 자료 (Time Series Data)와 관련된 주제들 계량경제학 15.12

Augmented Dickey Fuller test (ADF Test)

ADF(Augmented DF) 검정:

오차항이 계열상관 되어 있을 경우 이를 고려하기 위해 고안된 다음과 같은 모형 설정으로부터 이루어지는 단위근 검정을 ADF검정이라고 함

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^m a_i \Delta y_{t-i} + v_t \quad \Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^m a_i \Delta y_{t-i} + v_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^m a_i \Delta y_{t-i} + v_t$$

- 증대된 항의 개수(m)는 오차항의 계열 상관이 없어지기 충분한 정도로 결정함
- $\gamma=0$ 에 대한 ADF검정은 DF검정과 동일한 극한 분포를 가지며, 따라서 동일한 임계값을 사용함

(A)DF test example

$$\Delta \widehat{PCE}_t = -1.5144 + .0030 PCE_{t-1} \quad \Delta \widehat{PCE}_t = 2.0239 + 0.0152t + 0.0013 PCE_{t-1}$$

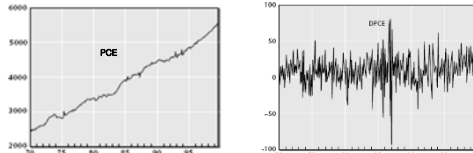
(tau) (-0.349) (2.557) (tau) (0.1068) (0.1917) (0.1377)

$$\Delta \widehat{PCE}_t = -2.111 + 0.00397 PCE_{t-1} - 0.2503 \Delta PCE_{t-1} - 0.0412 \Delta PCE_{t-2}$$

(tau) (-0.4951) (3.3068) (-4.6594) (-0.7679)

$$\Delta \widehat{DPCE}_t = -0.9969 DPCE_{t-1}$$

(tau) (-18.668)



허구적 (or 가성)회귀(Spurious Regressions)

허구적 회귀:

회귀분석에 있어서 비정상 시계열 자료를 사용할 경우 아무런 관련 없는 변수들간에 매우 유의한 것처럼 보이는 결과를 얻을 수 있으며, 이러한 회귀를 허구적 회귀 또는 가성 회귀라고 하며, 이 경우 그 모수는 해석 가능한 의미를 갖지 않는다.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

x_t 와 y_t 가 I(1) 시계열일 경우, 통상 ε_t 역시 I(1) 일 것으로 기대할 수 있는데, 실제로 ε_t 가 I(1)일 경우 이는 허구적 회귀임.

허구적 (or 가성) 회귀(Spurious Regressions)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

where $\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + v_t$

If $\theta_1=1$ least squares estimates of β_2 may appear highly significant even when true $\beta_2 = 0$.

허구적회귀(Spurious Regressions): 예시

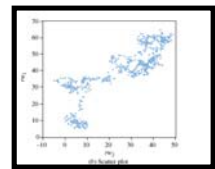
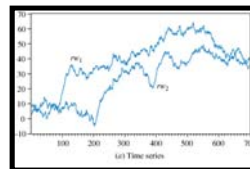
$$rw_1 : y_t = y_{t-1} + v_{1t}$$

$$rw_2 : x_t = x_{t-1} + v_{2t}$$

$$\rightarrow \widehat{rw_{1t}} = 17.818 + 0.842 rw_{2t}, \quad R^2 = .70$$

(t) (40.837)

$$v_{1t} \perp v_{2t}$$



공적분(Cointegration)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

x_t 와 y_t 가 I(1) 시계열일 경우, ε_t 가 I(1)인 경우 허구적 회귀임.

하지만, ε_t 가 I(0)가 되는 흥미로운 경우가 있으며, 이 때 x_t 와 y_t 는 공적분되어있다(cointegrated)라고 하며, 이 경우 위 회귀식은 공적분 회귀로서, 그 모수는 해석가능한 의미를 갖는다.

공적분(Cointegration)

I(1) 시계열 변수들이 공적분되어 있다는 것은, 경제학적으로 볼 때, 이들 변수들 사이에 장기적 균형 관계가 존재함을 의미하며, 공적분 관계를 만들어내는 계수(coefficient)를 공적분 계수 혹은 공적분 벡터라고 함

Ex) PPP 이론 : 환율과 물가수준의 비

공적분(Cointegration) 검증

EG 검증:

회귀식으로부터의 잔차에 대해 DF 또는 ADF 검정을 적용하는 방법 : (Engle-Granger(EG) 혹은 Augmented Engle-Granger(AEG) 검증이라고 함)

오차항이 관측되지 않으므로 잔차를 기반으로 통계치가 계산됨으로 인해 앞서의 (A)DF의 임계치는 부적절하며, Engle and Granger(1987) 가 임계치를 계산하였음

공적분(Cointegration): 예시

$$PCE_t = \beta_1 + \beta_2 PDI_t + \varepsilon_t, PCE_t \sim I(1), PDI_t \sim I(1)$$

$$\hat{PCE}_t = -171.4412 + 0.9672 PDI_t$$

(t-stats) (-7.4808) (119.8712) $R^2 = 0.9940$ $d = 0.5316$

$$\Delta \hat{\varepsilon}_t = -0.2753 \hat{\varepsilon}_{t-1}$$

(tau) (-3.7791)

이 경우 Engle and Granger의 1% 임계치는 -2.5899이며, 따라서 위 회귀식은 공적분 회귀이고, 추정계수 0.9672는 장기적 혹은 균형 한계소비성향으로 해석됨

오차수정모형 (Error Correction Model)

x_t 와 y_t 가 공적분되어 있다면, 변수의 단기적 변화를 전기의 장기적 균형으로부터의 이탈에 연계시키는 다음의 식이 성립한다. : **Granger's Representation Theorem.**

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 (y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 x_{t-1}) + v_t$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 \varepsilon_{t-1} + v_t$$

오차수정모형 (Error Correction Model)

$$\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 (y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 x_{t-1}) + v_t$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 \Delta x_t + \alpha_3 \varepsilon_{t-1} + v_t$$

ε_{t-1} : 공적분 회귀로부터의 오차항(균형오차)의 1기 과거 값

t-1기에서 t기 사이의 y_t 의 변화가 같은 기간의 x_t 의 변화에 대한 즉시적인 조정과 t-1기의 균형오차에 대한 조정을 포함하고 있음

균형오차의 조정으로 나타내는 항(α_3)을 오차수정항이라 하는데, 이는 -일 것으로 기대되며, 그 절대값의 크기는 균형으로 얼마나 빨리 회복되는가를 나타냄

오차수정모형 (Error Correction Model) : 예시

$$\Delta \hat{PCE}_t = 11.6918 + 0.2906 \Delta PDI_t - 0.0867 \hat{\varepsilon}_{t-1}$$

(t-stats) (5.3249) (4.1717) (-2.6003)

$$R^2 = 0.1717$$
 $d = 1.9233$

실제로는 $\hat{\varepsilon}_{t-1} = PCE_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 PDI_{t-1}$ 를 사용

0.2906은 단기적 소비성향으로 해석할 수 있음