제 3 강

단순 선형회귀 모형

(The Simple Linear Regression Model)

회귀분석의 목적

1. $y = f(x)$와 같이 이론에서 주어지는 경제적 변수들 간의 관계를 추정(estimate) 및 검정(test).

2. 설명변수의 값을 토대로 종속변수의 값을 예측(forecast)

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

y = 매주 식료품에 지출된 액수($).

x = 소비자의 주당 소득.

x가 주어졌을 때 y의 기대값과 x와의 관계는 선형(linear)일 수 있음

$$E(y|x) = \beta_1 + \beta_2 x$$

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

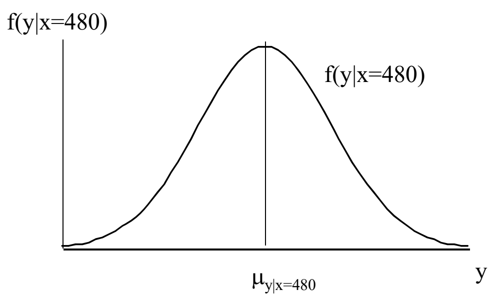


Figure 3.1a Probability Distribution f(y|x=480) of Food Expenditures if given income x=$480.

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

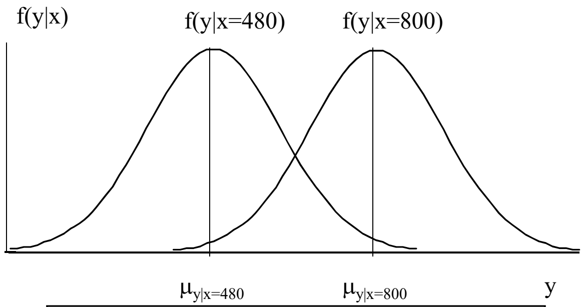


Figure 3.1b Probability Distribution of Food Expenditures if given income x=$480 and x=$800.

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

평균지출(average expenditure)

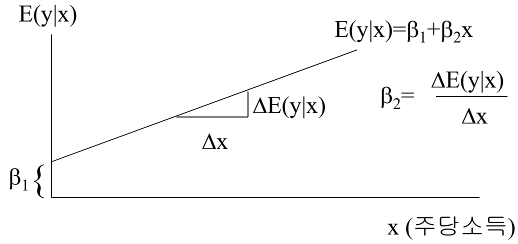


Figure 3.2 The Economic Model: a linear relationship between average expenditure on food and income.

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

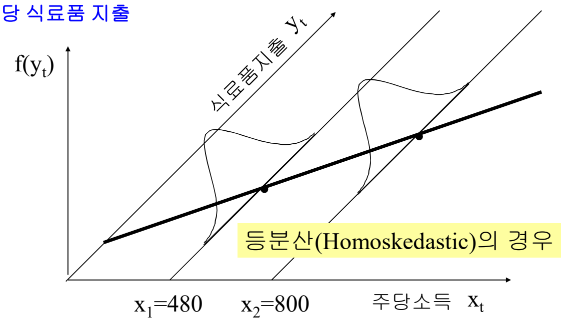


Figure 3.3. The probability density function for y_t at two levels of household income, x_t

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

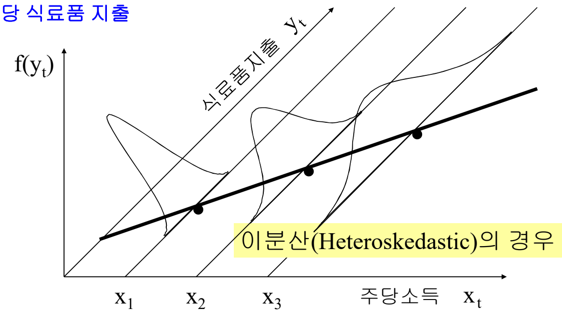


Figure 3.3+. The variance of y_t increases as household income, x_t, increases.

단순 선형회귀 모형의 가정

1. 주어진 x에 대해 y의 평균값은 선형(회귀)식으로 주어진다.

   $E(y) = \beta_1 + \beta_2 x$

2. 각 x의 값에 대해 y의 값은 그 평균값 주변에서 다음의 분산을 갖는 분포를 한다.

   $var(y) = \sigma^2$

3. y의 값들은 상관되어 있지 않으며, 즉 0의 공분산을 가지며, 따라서 선형관계를 갖지 않는다.

   $cov(y_i, y_j) = 0$

4. 변수 x는 적어도 두개의 다른 값을 가지며 확률변수가 아니다.

단순 선형회귀 모형의 가정

실제 종종 사용되기는 하지만 추정(estimation)에 있어서 반드시 필요하지는 않은 추가적 가정

5. (optional) y의 값들은 각 x값에 대해 그들의 평균 주변에서 정규분포를 함

   $y \sim N\,[(\beta_1+\beta_2 x), \sigma^2]$

오차항(The Error Term)

오차항의 도입

y는 두 부분으로 구성되는 확률변수이다.

I. 체계적 부분: $E(y) = \beta_1 + \beta_2 x$

y의 평균임.

II. 확률적 부분: $\varepsilon = y - E(y)$

$= y - \beta_1 - \beta_2 x$

이 부분을 오차항이라고 부름.

E(y)와 ε 이 함께 모형을 형성함

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$$

오차항(The Error Term)

오차항의 원천

1. 모형에서 구체화 되지 않은 요소들/설명변수들이 오차항에 있을 수 있다.
2. y와 x의 관계가 정확히 선형관계가 아닌 경우 근사(approximation)오차가 오차항에 있게 된다.
3. 관측치에 특정적인 순수하게 예측불가능한 확률적 행태가 오차항에 있게 된다.

오차항(The Error Term)

오차항의 분포

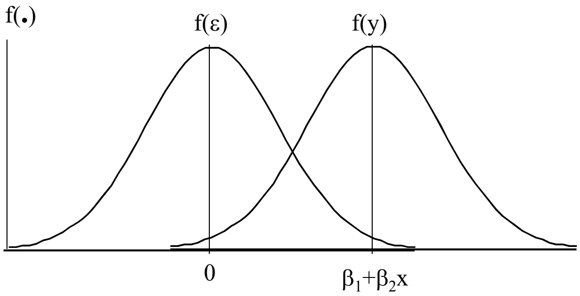


Figure 3.4 Probability density function for ε and y

단순 선형회귀 모형의 가정 II

오차항

1. x의 각 값에 대해 y의 값은:
   $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$
2. (주어진 x에 대해) 오차항 ε의 평균적 값은 :
   $E(\varepsilon) = 0$
3. (주어진 x에 대해) 오차항 ε의 분산은 :
   $var(\varepsilon) = \sigma^2 = var(y)$
4. 임의의 두 오차항 쌍(pair)간의 공분산은:
   $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = cov(y_i, y_j) = 0$
5. x 는 반드시 두 개의 다른 값을 가지며 확률변수가 아니다.
6. ε 는 평균은 0이고 분산은 var(ε)=σ² 인 정규분포를 한다. (optional) $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$

모수의 추정 (Estimating the parameters)

모집단(Population) 회귀값:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

모집단 회귀선(regression line):

$$E(y_t | x_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$$

표본(Sample) 회귀값:

$$y_t = b_1 + b_2 x_t + \hat{\varepsilon}_t$$

표본(Sample) 회귀선:

$$\hat{y}_t = b_1 + b_2 x_t$$

모수의 추정 (Estimating the parameters)

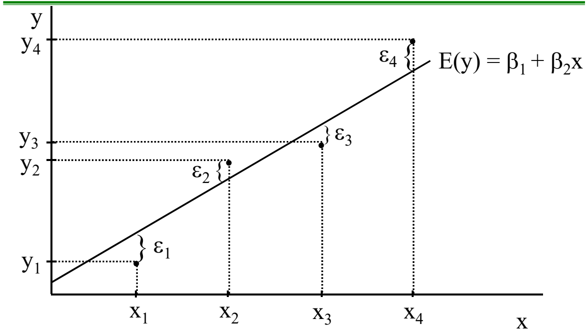


Figure 3.5 The relationship among y, ε and the true regression line.

모수의 추정 (Estimating the parameters)

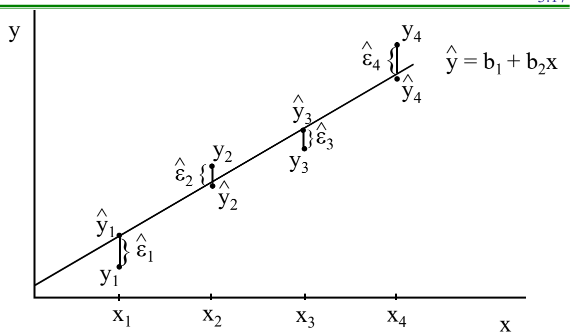
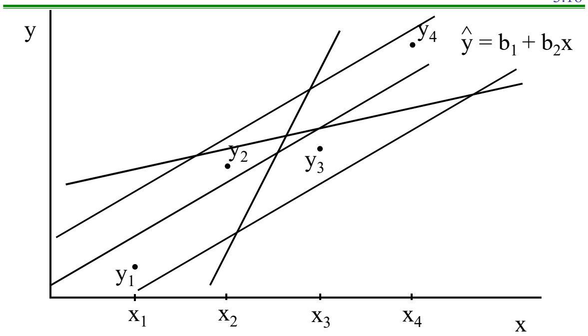


Figure 3.7a The relationship among y, $\hat{\varepsilon}$ and the fitted regression line.

모수의 추정 (Estimating the parameters)



How to find b_1 and b_2

최소제곱의 원칙(The Least Squares Principle)

계량경제학 3.19

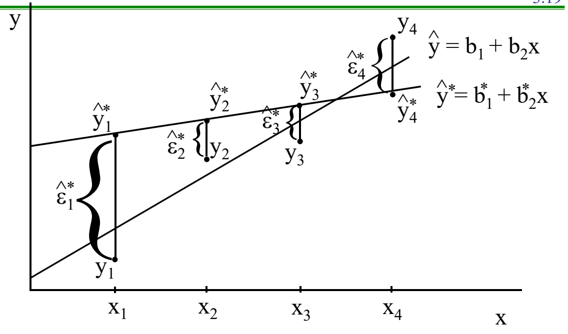


Figure 3.7b The sum of squared residuals from any other line will be larger.

최소제곱의 원칙(The Least Squares Principle)

계량경제학 3.20

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t$$

편차의 제곱의 합을 최소화 함

$$S(\beta_1,\beta_2) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)^2 \qquad (3.3.4)$$

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

계량경제학 3.21

Minimize w.r.t. β_1 and β_2:

$$S(\beta_1,\beta_2) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)^2 \qquad (3.3.4)$$

$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_1} = -2\sum(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)$$

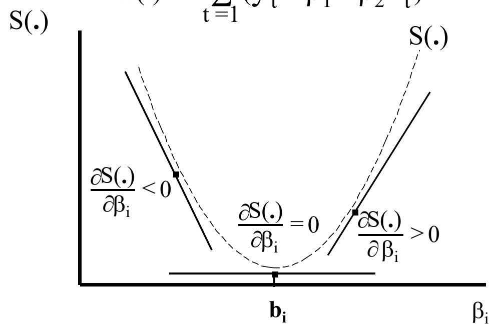
$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_2} = -2\sum x_t(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)$$

두 편미분을 0으로 놓고, 이 두 방정식을 두 미지수 β_1 β_2에 대해 풀면:

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

계량경제학 3.22

$$S(.) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)^2$$



최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

계량경제학 3.23

$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_1} = -2\sum(y_t - b_1 - b_2 x_t) = 0$$

$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_2} = -2\sum x_t(y_t - b_1 - b_2 x_t) = 0$$

이 두 식을 0으로 놓게 되면 β_1 and β_2 는 b_1 and b_2 로 표기할 수 있는데 이는 이들이 더 이상 임의의 미지의 값 β_1 and β_2 를 나타내는 것이 아니라 S(.)의 최소값에 대응되는 어떤 특별한 값을 나타내기 때문임.

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

계량경제학 3.24

$$-2\sum(y_t - b_1 - b_2 x_t) = 0$$
$$-2\sum x_t(y_t - b_1 - b_2 x_t) = 0$$

$$\sum y_t - Tb_1 - b_2\sum x_t = 0$$
$$\sum x_t y_t - b_1\sum x_t - b_2\sum x_t^2 = 0$$

$$Tb_1 + b_2\sum x_t = \sum y_t$$
$$b_1\sum x_t + b_2\sum x_t^2 = \sum x_t y_t$$

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

$$Tb_1 + b_2 \Sigma x_t = \Sigma y_t$$
$$b_1 \Sigma x_t + b_2 \Sigma x_t^2 = \Sigma x_t y_t$$

$\bar{x}$와 $\bar{y}$의 정의를 이용하여 b_1과 b_2 에 대해서 품

$$b_2 = \frac{T \Sigma x_t y_t - \Sigma x_t \Sigma y_t}{T \Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

추정값의 활용

탄력성

$$\eta = \frac{y\text{의 변화율}}{x\text{의 변화율}} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}$$

미적분학을 이용하면 한 점에서의 탄력성을 얻음

$$\eta = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}\right] = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

추정값의 활용

탄력성

$$E(y) = \beta_1 + \beta_2 x$$

$$\frac{\partial E(y)}{\partial x} = \beta_2$$

$$\eta = \frac{\partial E(y)}{\partial x}\frac{x}{E(y)} = \beta_2 \frac{x}{E(y)}$$

추정값의 활용

$(\bar{x},\bar{y})$ 에서의 탄력성

$$\hat{\eta} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = b_2 \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

$$\hat{y}_t = b_1 + b_2 x_t = 4 + 1.5 x_t$$

$\bar{x}$ = **8** = average number of years of experience

$\bar{y}$ = **$16** = average wage rate

$$\hat{\eta} = b_2 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 1.5 \frac{8}{16} = 0.75$$

추정값의 활용

예측

Estimated regression equation:

$$\hat{y}_t = 4 + 1.5 x_t$$

x_t = years of experience

$\hat{y}_t$ = predicted wage rate

If x_t = **2** years, then $\hat{y}_t$ = $7.00 per hour.

If x_t = **3** years, then $\hat{y}_t$ = $8.50 per hour.

단순 선형회귀 모형의 다른 형태

Log-log 모형

$$\ln(y) = \beta_1 + \beta_2 \ln(x)$$

$$\frac{\partial \ln(y)}{\partial x} = \beta_2 \frac{\partial \ln(x)}{\partial x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2 \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial x}$$

단순 선형회귀 모형의 다른 형태

Log-log 모형

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2 \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$\frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2$$

x에 대한 **y**의 탄력성

$$\eta = \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2$$