

제 4 강

최소제곱 추정량의 특성 (Properties of Least Squares Estimators)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

y_t = 가게의 주당 식료품 지출

x_t = 가게의 주당 소득

주어진 x_t 의 수준에 대해 식료품 지출의
기대 수준은:

$$E(y_t|x_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$$

1. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
2. $E(\varepsilon_t) = 0 \iff E(y_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$
3. $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \text{var}(y_t)$
4. $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \text{cov}(y_i, y_j) = 0$
5. x_t 는 확률변수가 아니며 적어도 두 개의 다른 값을 가진다.
6. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \iff y_t \sim N(\beta_1 + \beta_2 x_t, \sigma^2)$

모수들 β_1 과 β_2
는 알려지지 않은 모집단 상수들임

추정치(estimate) b_1 과 b_2 를 계산해내는 공
식을
 β_1 과 β_2 의 추정량(estimator)이라고 함

b_1 과 b_2 가 특정한 값이 아니라

공식을 나타낼 때, 이들을 β_1 과 β_2
의 추정량이라고 하며 이들은 확률변수의
함수로서 확률변수들임

- 최소제곱추정량 b_1 and b_2 가 확률변수들이라면 그들의 분포들은 무엇이며, 특히 평균, 분산, 공분산은 무엇인가?
- 다른 대안의 추정량들의 특성들을 최소제곱추정량의 특성(properties)들과 어떻게 비교할 수 있는가?

단순회귀모형에 있어서의 최소제곱추정량:

$$b_2 = \frac{T\sum x_t y_t - \sum x_t \sum y_t}{T\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2} \quad (4-1)$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x} \quad (4-2)$$

단 $\bar{y} = \sum y_t / T, \quad \bar{x} = \sum x_t / T$

기울기

$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ 를 대입하여
다음을 얻음:

$$b_2 = \beta_2 + \frac{T \sum x_t \varepsilon_t - \sum x_t \sum \varepsilon_t}{T \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2} \quad (4-3)$$

b_2 의 평균은:

$$E b_2 = \beta_2 + \frac{T \sum x_t E \varepsilon_t - \sum x_t \sum E \varepsilon_t}{T \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2} = 0$$

왜냐하면 $E \varepsilon_t = 0$, 따라서 $E b_2 = \beta_2$.

기울기

$E b_2 = \beta_2$ 라는 결과는 b_2 의 분포가 β_2 를
중심으로 이루어져 있음을 의미함

b_2 의 분포가 β_2 를 중심으로 이루어 있으므로
 b_2 는 β_2 의 불편 추정량이라고 함

앞서의 불편성에 대한 결과는
올은 모형(correct model)을 사용
하는 것을 전제로 함

모형이 잘못되었거나, 특히 중요한
변수가 빠져 있을 경우, $E\varepsilon_t \neq 0$,
이고 이 경우 $Eb_2 \neq \beta_2$ 이다.

예:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + (\beta_3 X_3 + v)$$

$$\varepsilon = \beta_3 X_3 + v$$

$$E(\varepsilon_t) \neq 0$$

절편

비슷한 방법으로 상수항 또는 절편에 대한
추정량 b_1 역시 모형이 옳게 설정되어 있을
때 β_1 에 대한 불편추정량임

$$Eb_1 = \beta_1$$



β₂에 대한 최소제곱추정량은 y_t들의 선형결합으로 표현됨:

$$b_2 = \sum w_t y_t \quad (4-4)$$

$$\text{where } w_t = \frac{(x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

$$b_2 = \beta_2 + \sum w_t \varepsilon_t \quad (4-5)$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$



기울기

y_t와 ε_t가 모두 분산이 σ²임이 주어졌을 때, 추정량 b₂의 분산은?:

$$\text{var}(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$



b₂는 y_t들의 함수이지만 var(b₂)는 직접적으로 y_t를 포함하지 않음.

질문

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x} \quad \Rightarrow$$

추정량 b_1 의 분산은?:

$$\text{var}(b_1) = \sigma^2 \left[\frac{\sum x_t^2}{T \sum (x_t - \bar{x})^2} \right]$$



$$\text{cov}(b_1, b_2) = \sigma^2 \left[\frac{-\bar{x}}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right]$$



$\bar{x} = 0$ 이면, 기울기는 공분산에 영향을 주지 않고 변화할 수 있음

1. σ^2 : y_t 값들에 내재해 있는 불확실성 (오차항의 원천에서 비롯됨)이 b_1 과 b_2 의 불확실성 및 그 관계에 영향을 줌
2. X_t 값들이 퍼져 있을수록 b_1, b_2 에 대한 신뢰를 높일 수 있음
3. 표본의 크기 T 가 클수록 분산과 공분산이 작아짐
4. b_1 의 분산은 x_t 의 값들이 0으로부터 멀어질 수록 커짐(즉 제곱값들의 합이 클수록 커짐).
5. x_t 의 표본평균이 0일 경우 기울기 b_2 의 변화는 절편 b_1 에 영향을 미치지 않음. 그러나 표본 평균이 +인 경우 b_1 와 b_2 의 공분산은 음이며, -인 경우엔 양임

단순선형회귀모형의 가정 1 – 5하에서,
(표준, ordinary)최소제곱추정량 b_1 과 b_2 는 β_1 와 β_2 에 대한 모든 선형불편추정량 가운데 가장 작은 분산을 갖는다.

이는 b_1 과 b_2 가 β_1 and β_2 .에 대한 최우수 선형 불편 추정량 (BLUE, the Best Linear Unbiased Estimator)임을 의미함

1. b_1 과 b_2 는 선형이고 불편인 추정량의 범주내에서 “최우수(best)”임
2. “최우수(Best)”라함은 선형/불편 추정량 가운데 가장 작은 분산을 가짐을 의미함
3. 가우스 마코프 정리가 성립하기 위해서는 처음 다섯개의 가정들 모두가 만족되어야 함.
4. 가우스 마코프 정리는 여섯번째 가정, 즉 정규분포에 대한 가정은 필요로하지 않음
5. 가우스 마코프 정리는 추정량 b_1 및 b_2 에 적용되는 것이며 특정한 표본값(즉 추정치) b_1 및 b_2 에 적용되는 것이 아님

7. 선형불편추정량의 범주에 추정을 국한시키지 않는다면 가우스 마코프 정리는 더 이상 의미를 갖지 않으며 비선형 혹은/그리고 편향(biased) 추정량을 대신 사용할 수도 있음 (Note: 편향 혹은 비선형 추정량이 가우스 마코프 정리를 만족시키는 추정량보다 더 작은 분산을 가질 수 있음). 하지만 선형불편추정량에 우리의 관심을 국한시키는 한 더 이상 다른 추정량을 탐구할 필요는 없음



y_t 와 ε_t 가 정규분포를 하는 경우

β_2 의 최소제곱추정량은 y_t '들의 선형결합으로 표현될 수 있음

$$b_2 = \sum w_t y_t$$

$$\text{where } w_t = \frac{(x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

정규분포를 하는 확률변수의 선형결합은 정규분포를 하게 되므로 b_1 와 b_2 가 정규분포를 함을 의미함

중심극한정리(CLT)하에서 정규분포

가우스 마코프 정리의 다섯개의 가정들이 성립하고 표본의 크기 T 가 충분히 크다면, 최소제곱추정량 b_1 과 b_2 의 분포는 정규분포로 근사(approximation)할 수 있으며 표본의 크기가 클 수록 근사의 정확도는 커짐

$$b_1 \sim N \left[\beta_1, \frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{T \sum (x_t - \bar{x})^2} \right]$$

$$b_2 \sim N \left[\beta_2, \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right]$$

표본의 크기 T 가 무한히 커질 경우 추정량 b_1 과 b_2 가 그 모수값(true population value), β_1 과 β_2 로 (확률적으로)수렴하는 것이 바람직함 - 일치성

이러한 일치성(consistency)를 달성하는 하나의 방법은 b_1 과 b_2 의 분산이 T 가 무한대로 감에 따라 0이 되는 것임

최소제곱추정량 b_1 과 b_2 의 분산의 공식은 그들의 분산이 실제로 T 가 무한히 커짐에 따라 0으로 가게 되는 것을 보여주고 있음. 따라서 b_1 과 b_2 는 β_1 과 β_2 의 일치추정량임

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \Rightarrow \sum \varepsilon_t^2 / T \quad ?$$

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - b_1 - b_2 x_t \Rightarrow \sum \hat{\varepsilon}_t^2 / T \quad ?$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2}$$

$\hat{\sigma}^2$ 는 σ^2 의 불편추정량임



$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2} \Rightarrow \widehat{\text{Var}}(b_1), \widehat{\text{Var}}(b_2)$$

$$\text{S.E.}(b_i) = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(b_i)}$$

표준오차(Standard Error)



설명변수의 값 X_0 가 주어졌을 때,
종속변수의 값 y_0 를 예측하고자 할 경우

최소제곱예측치는:

$$\hat{y}_0 = b_1 + b_2 x_0$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{T \sum x_t y_t - \sum x_t \sum y_t}{T \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2} \\ &= \frac{T \sum x_t (\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t) - \sum x_t \sum (\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t)}{T \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2} \\ &= \frac{T\beta_1 \sum x_t + T\beta_2 \sum (x_t)^2 + T \sum x_t \varepsilon_t - T\beta_1 \sum x_t - \beta_2 (\sum x_t)^2 - \sum x_t \sum \varepsilon_t}{T \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2} \\ &= \frac{T\beta_2 \sum (x_t)^2 - \beta_2 (\sum x_t)^2 + T \sum x_t \varepsilon_t - \sum x_t \sum \varepsilon_t}{T \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2} \end{aligned}$$



$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}$$

$$E(b_1) = E(\bar{y}) - \bar{x}E(b_2)$$

$$= E\left(\frac{1}{T} \sum (\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t)\right) - \beta_2 \bar{x}$$

$$= E\left(\beta_1 + \beta_2 \bar{x} + \frac{1}{T} \sum \varepsilon_t\right) - \beta_2 \bar{x} = \beta_1$$



$$\sum (x_t - \bar{x})^2 = \sum x_t^2 - 2\bar{x} \sum x_t + T \bar{x}^2 = \sum x_t^2 - 2\bar{x} \left(T \frac{1}{T} \sum x_t \right) + T \bar{x}^2$$

$$= \sum x_t^2 - 2T \bar{x}^2 + T \bar{x}^2 = \sum x_t^2 - T \bar{x}^2$$

$$= \sum x_t^2 - \bar{x} \sum x_t = \sum x_t^2 - \frac{(\sum x_t)^2}{T}$$

$$\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) = \sum x_t y_t - T \bar{x} \bar{y} = \sum x_t y_t - \frac{\sum x_t \sum y_t}{T}$$

$$b_2 = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{T \sum x_t y_t - \sum x_t \sum y_t}{T \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$\begin{aligned} \sum (x_t - \bar{x}) &= 0 \\ b_2 &= \frac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_t - \bar{x})y_t - \bar{y} \sum (x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\sum (x_t - \bar{x})y_t}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \sum \left[\frac{(x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right] y_t = \sum w_t y_t \\ b_2 &= \sum w_t y_t = \sum w_t (\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t) \\ &= \beta_1 \sum w_t + \beta_2 \sum w_t x_t + \sum w_t \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum w_t &= \sum \left[\frac{(x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right] = \frac{1}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \sum (x_t - \bar{x}) = 0 \\ \sum (x_t - \bar{x})^2 &= \sum (x_t - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \\ &= \sum (x_t - \bar{x})x_t - \bar{x} \sum (x_t - \bar{x}) = \sum (x_t - \bar{x})x_t \\ \sum w_t x_t &= \frac{\sum (x_t - \bar{x})x_t}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_t - \bar{x})x_t}{\sum (x_t - \bar{x})x_t} = 1 \\ b_2 &= \beta_1 \sum w_t + \beta_2 \sum w_t x_t + \sum w_t \varepsilon_t \\ &= \beta_2 + \sum w_t \varepsilon_t \end{aligned}$$



b_2 의 분산

계량경제학
4.31

$$\begin{aligned}\text{var}(b_2) &= \text{var}\left(\beta_2 + \sum w_i \varepsilon_i\right) = \text{var}\left(\sum w_i \varepsilon_i\right) && \text{[since } \beta_2 \text{ is a constant]} \\ &= \sum w_i^2 \text{var}(\varepsilon_i) && \text{[using } \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0\text{]} \\ &= \sigma^2 \sum w_i^2 && \text{[using } \text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2\text{]} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\end{aligned}$$

$$\sum w_i^2 = \sum \left[\frac{(x_i - \bar{x})^2}{\left\{ \sum (x_i - \bar{x})^2 \right\}^2} \right] = \frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$



b_1 의 분산

계량경제학
4.32

$$\begin{aligned}\text{Var}(b_1) &= E\left[(b_1 - \beta_1)^2\right] = E\left[(\bar{y} - b_2 \bar{x} - (\bar{y} - \beta_2 \bar{x} - \bar{\varepsilon}))^2\right] \\ &= E\left[(-\bar{x}(b_2 - \beta_2) + \bar{\varepsilon})^2\right] \\ &= \bar{x}^2 E\left[(b_2 - \beta_2)^2\right] + E\left[\bar{\varepsilon}^2\right] \quad (\because E[\bar{\varepsilon}(b_2 - \beta_2)] = 0) \\ &= \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{1}{T^2} E\left[\sum \varepsilon_i \sum \varepsilon_s\right] = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sigma^2}{T} \\ &= \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum (x_i - \bar{x})^2 \right]}{T \sum (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + T\bar{x}^2 \right]}{T \sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum x_i^2 - 2T\bar{x}^2 + T\bar{x}^2 \right]}{T \sum (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\sigma^2 \left[\sum x_i^2 \right]}{T \sum (x_i - \bar{x})^2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(b_1, b_2) &= E\{[b_1 - E(b_1)][b_2 - E(b_2)]\} \\
 &= E\{[b_1 - \beta_1][b_2 - E(b_2)]\} \\
 &= E\{[(\bar{y} - b_2\bar{x}) - (\bar{y} - \beta_2\bar{x} - \bar{\varepsilon})][b_2 - \beta_2]\} \\
 &= E\{[(\bar{y} - b_2\bar{x}) - (\bar{y} - \beta_2\bar{x})][b_2 - \beta_2]\} \\
 &= E\{-\bar{x}(b_2 - \beta_2)[b_2 - \beta_2]\} \\
 &= -\bar{x} E(b_2 - \beta_2)^2 \\
 &= -\bar{x} [\sigma^2 / \sum(x_i - \bar{x})^2] \\
 E(\bar{\varepsilon}(b_2 - \beta_2)) &= \frac{1}{T} E\left(\sum \varepsilon_t \sum w_s \varepsilon_s\right) \\
 &= \frac{1}{T} E\left(\sum w_t \varepsilon_t^2 + \sum_{t \neq s} w_t \varepsilon_t \varepsilon_s\right) \\
 &= \frac{1}{T} E\left(\sum w_t \varepsilon_t^2\right) = \frac{1}{T} \sigma^2 \left(\sum w_t\right) = 0
 \end{aligned}$$



$$b_2^* = \sum k_t y_t$$

(where the k_t are constants) be any other linear estimator of β_2 .

- Suppose that

$$k_t = w_t + c_t$$

, where c_t is another constant and w_t is given in equation (4.4).

- Into this new estimator substitute y_t and simplify, using the properties of w_t .

$$\begin{aligned}
 b_2^* &= \sum k_t y_t = \sum (w_t + c_t) y_t = \sum (w_t + c_t) (\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t) \\
 &= \sum (w_t + c_t) \beta_1 + \sum (w_t + c_t) \beta_2 x_t + \sum (w_t + c_t) \varepsilon_t \\
 &= \beta_1 \sum w_t + \beta_1 \sum c_t + \beta_2 \sum w_t x_t + \beta_2 \sum c_t x_t + \sum (w_t + c_t) \varepsilon_t \\
 &= \beta_1 \sum c_t + \beta_2 + \beta_2 \sum c_t x_t + \sum (w_t + c_t) \varepsilon_t \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

since $\sum w_t = 0$ and $\sum w_t x_t = 1$.

Proof of the Gauss–Markov Theorem

계량경제학
4.35

$$\begin{aligned} E(b_2^*) &= \beta_1 \sum c_i + \beta_2 + \beta_2 \sum c_i x_i + \sum (w_i + c_i) E(\varepsilon_i) \\ &= \beta_1 \sum c_i + \beta_2 + \beta_2 \sum c_i x_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

In order for the linear estimator $b_2^* = \sum k_i y_i$ to be unbiased it must be true that

$$\sum c_i = 0 \text{ and } \sum c_i x_i = 0 \quad (4.8)$$

These conditions must hold in order for

$$b_2^* = \sum k_i y_i$$

to be in the class of *linear* and *unbiased estimators*.

Proof of the Gauss–Markov Theorem

계량경제학
4.36

So we will assume the conditions (4.8) hold and use them to simplify expression (4.6):

$$b_2^* = \sum k_i y_i = \beta_2 + \sum (w_i + c_i) \varepsilon_i \quad (4.9)$$

We can now find the variance of the linear unbiased estimator

Using the additional fact that

$$\sum c_i w_i = \sum \left[\frac{c_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right] = \frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sum c_i x_i - \frac{\bar{x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sum c_i = 0$$

- Use the properties of variance to obtain:

$$\begin{aligned} \text{var}(b_2^*) &= \text{var} \left(\beta_2 + \sum (w_i + c_i) \varepsilon_i \right) = \sum (w_i + c_i)^2 \text{var}(\varepsilon_i) \\ &= \sigma^2 \sum (w_i + c_i)^2 = \sigma^2 \sum w_i^2 + \sigma^2 \sum c_i^2 \\ &= \text{var}(b_2) + \sigma^2 \sum c_i^2 \\ &\geq \text{var}(b_2) \text{ since } \sum c_i^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$



The Proof of unbiased estimator of σ^2

계량경제학
4.37

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \bar{y} - \beta_1 - \beta_2 \bar{x} \\ &\Rightarrow \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} = y_t - \bar{y} - \beta_2 (x_t - \bar{x}) \\ \hat{\varepsilon}_t &= y_t - b_1 - b_2 x_t, \quad 0 = \bar{y} - b_1 - b_2 \bar{x} \Rightarrow \hat{\varepsilon}_t = y_t - \bar{y} - b_2 (x_t - \bar{x}) \\ \hat{\varepsilon}_t &= \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} + \beta_2 (x_t - \bar{x}) - b_2 (x_t - \bar{x}) \\ &= -(b_2 - \beta_2)(x_t - \bar{x}) + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} \\ \sum (\hat{\varepsilon}_t)^2 &= (b_2 - \beta_2)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 + \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 \\ &\quad - 2(b_2 - \beta_2) \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) \end{aligned}$$

The Proof of unbiased estimator of σ^2

계량경제학
4.38

$$\begin{aligned} E\left(\sum (\hat{\varepsilon}_t)^2\right) &= E\left((b_2 - \beta_2)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 + \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right) \\ &\quad - 2E\left((b_2 - \beta_2) \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right) \\ E\left(\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right) &= \sum E(\varepsilon_t^2 - 2\varepsilon_t \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2) = \sum E(\varepsilon_t^2) - 2 \sum E(\varepsilon_t \bar{\varepsilon}) + TE(\bar{\varepsilon}^2) \\ &= T\sigma^2 - \frac{2}{T} \sum E\left(\varepsilon_t^2 + \varepsilon_t \sum_{j \neq t} \varepsilon_j\right) + \frac{1}{T} E\left(\sum \varepsilon_t^2 + \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j\right) \\ &= T\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2 = (T-1)\sigma^2 \\ -2E\left((b_2 - \beta_2) \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right) &= -2 \sum (x_t - \bar{x}) E\left((\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) \sum w_j \varepsilon_j\right) \\ &= -2 \sum (x_t - \bar{x}) E\left(w_t \varepsilon_t^2 - \frac{1}{T} \sum w_j \varepsilon_j^2\right) \\ &= -2\sigma^2 \sum (x_t - \bar{x})(w_t - \bar{w}) = -2\sigma^2 \end{aligned}$$

Example

gretl: model 1

Model 1: OLS, using observations 1-40
Dependent variable: y

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	40.7676	22.1387	1.841	0.0734 *
x	0.128289	0.0305393	4.201	0.0002 ***

	Mean dependent var	S.D. dependent var	Sum squared resid	S.E. of regression	R-squared	Adjusted R-squared	F(1, 38)	P-value(F)	Log-likelihood	Akaike criterion	Schwarz criterion	Hannan-Quinn
	130.3130	45.15857	54311.33	37.80536	0.317118	0.299148	17.64653	0.000155	-201.0297	406.0594	409.4372	407.2807

b_1 의 분산

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(b_1) &= E[(b_1 - \beta_1)^2] = E[(\bar{y} - b_2\bar{x} - (\bar{y} - \beta_2\bar{x} - \bar{\varepsilon}))^2] \\
 &= E[(-\bar{x}(b_2 - \beta_2) + \bar{\varepsilon})^2] \\
 &= \bar{x}^2 E[(b_2 - \beta_2)^2] + E[\bar{\varepsilon}^2] \quad (\because E[\bar{\varepsilon}(b_2 - \beta_2)] = 0) \\
 &= \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} + \frac{1}{T^2} E[\sum \varepsilon_i \sum \varepsilon_s] = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sigma^2}{T} \\
 &= \frac{\sigma^2 [T\bar{x}^2 + \sum(x_i - \bar{x})^2]}{T \sum(x_i - \bar{x})^2} \\
 &= \frac{\sigma^2 [T\bar{x}^2 + \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + T\bar{x}^2]}{T \sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2 [T\bar{x}^2 + \sum x_i^2 - 2T\bar{x}^2 + T\bar{x}^2]}{T \sum(x_i - \bar{x})^2} \\
 &= \frac{\sigma^2 [\sum x_i^2]}{T \sum(x_i - \bar{x})^2}
 \end{aligned}$$