제 4 강

최소제곱 추정량의 특성
(Properties of Least Squares Estimators)

단순 선형회귀 모형

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

y_t = 가계의 주당 식료품 지출

x_t = 가계의 주당 소득

주어진 x_t의 수준에 대해 식료품 지출의 기대 수준은:

$$E(y_t|x_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$$

단순 선형회귀 모형 가정

1. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
2. $E(\varepsilon_t) = 0$ <=> $E(y_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$
3. $var(\varepsilon_t) = \sigma^2 = var(y_t)$
4. $cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = cov(y_i,y_j) = 0$
5. x_t 는 확률변수가 아니며 적어도 두 개의 다른 값을 가진다.
6. $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$ <=> $y_t \sim N(\beta_1 + \beta_2 x_t, \sigma^2)$

단순 선형회귀 모형 추정

모수들 β_1 과 β_2 는 알려지지 않은 모집단 상수들임

추정치(estimate) b_1 과 b_2 를 계산해내는 공식을 β_1 과 β_2의 추정량(estimator)이라고 함

b_1 과 b_2 가 특정한 값이 아니라 공식을 나타낼 때, 이들을 β_1 과 β_2 의 추정량이라고 하며 이들은 확률변수의 함수로서 확률변수들임

추정량은 확률변수

- 최소제곱추정량 b_1 and b_2 가 확률변수들 이라면 그들의 분포들은 무엇이며, 특히 평균, 분산, 공분산은 무엇인가?
- 다른 대안의 추정량들의 특성들을 최소제곱 추정량의 특성(properties)들과 어떻게 비교할 수 있는가?

최소제곱 추정량의 기대값

단순회귀모형에 있어서의 최소제곱추정량:

$$b_2 = \frac{T\Sigma x_t y_t - \Sigma x_t \Sigma y_t}{T\Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2} \qquad (4\text{-}1)$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x} \qquad (4\text{-}2)$$

단 $\bar{y} = \Sigma y_t / T$, $\bar{x} = \Sigma x_t / T$

최소제곱 추정량의 기대값

기울기

$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ 를 대입하여 다음을 얻음:

$$b_2 = \beta_2 + \frac{T\Sigma x_t\varepsilon_t - \Sigma x_t \Sigma\varepsilon_t}{T\Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2} \qquad (4\text{-}3)$$

b_2 의 평균은:

$$Eb_2 = \beta_2 + \cancel{\frac{T\Sigma x_t E\varepsilon_t - \Sigma x_t \Sigma E\varepsilon_t}{T\Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2}} \; =0$$

왜냐하면 $E\varepsilon_t = 0$, 따라서 $Eb_2 = \beta_2$.

불편추정량(Unbiased Estimator)

기울기

$Eb_2 = \beta_2$ 라는 결과는 b_2 의 분포가 β_2를 중심으로 이루어져 있음을 의미함

b_2 의 분포가 β_2를 중심으로 이루어 있으므로 b_2 는 β_2의 불편추정량이라고 함

불편추정량(Unbiased Estimator)

앞서의 불편성에 대한 결과는 옳은 모형(**correct model**)을 사용하는 것을 전제로 함

모형이 잘못되었거나, 특히 중요한 변수가 빠져 있을 경우, $E\varepsilon_t \neq 0$, 이고 이 경우 $Eb_2 \neq \beta_2$ 이다.

예:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + (\beta_3 X_3 + v)$$

$\varepsilon = \beta_3 X_3 + v$

$E(\varepsilon_t) \neq 0$

불편추정량(Unbiased Estimator)

절편

비슷한 방법으로 상수항 또는 절편에 대한 추정량 b_1 역시 모형이 옳게 설정되어 있을 때 β_1 에 대한 불편추정량임

$$Eb_1 = \beta_1$$

b_2에 대한 다른 표현

β_2 에 대한 최소제곱추정량은 y_t들의 선형결합으로 표현됨:

$$b_2 = \Sigma w_t y_t \qquad (4\text{-}4)$$

$$\text{where } w_t = \frac{(x_t - \bar{x})}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2}$$

$$b_2 = \beta_2 + \Sigma w_t \varepsilon_t \qquad (4\text{-}5)$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

최소제곱 추정량의 분산

기울기

y_t 와 ε_t 가 모두 분산이 σ^2,임이 주어졌을때, 추정량 b_2 의 분산은?:

$$var(b_2) = \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2}$$

b_2 는 y_t 들의 함수이지만 $var(b_2)$는 직접적으로 y_t 를 포함하지 않음.

최소제곱 추정량의 분산

절편

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x} \quad \Rightarrow$$

추정량 b_1 의 분산은?:

$$\text{var}(b_1) = \sigma^2 \left[\frac{\Sigma x_t^2}{T\,\Sigma(x_t - \bar{x})^2} \right]$$

b_2 와 b_1의 공분산

$$\text{cov}(b_1,b_2) = \sigma^2 \left[\frac{-\bar{x}}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2} \right]$$

$\bar{x} = 0$이면, 기울기는 공분산에 영향을 주지 않고 변화할 수 있음

분산과 공분산에 영향을 미치는 요인들

1. σ^2: y_t 값들에 내재해 있는 불확실성 (오차항의 원천에서 비롯됨)이 b_1과 b_2의 불확실성 및 그 관계에 영향을 줌

2. X_t 값들이 퍼져 있을수록 b_1, b_2에 대한 신뢰를 높일 수 있음

3. 표본의 크기 T가 클수록 분산과 공분산이 작아짐

4. b_1 의 분산은 x_t 의 값들이 0으로부터 멀어질 수록 커짐(즉 제곱값들의 합이 클수록 커짐).

5. x_t의 표본평균이 0일 경우 기울기 b_2 의 변화는 절편 b_1에 영향을 미치지 않음. 그러나 표본 평균이 + 인 경우 b_1와 b_2 의 공분산은 음이며, - 인 경우엔 양임

Gauss Markov Theorem

단순선형회귀모형의 가정 1 – 5하에서, (표준, ordinary)최소제곱추정량 b_1 과 b_2 는 β_1 와 β_2에 대한 모든 선형불편추정량 가운데 가장 작은 분산을 갖는다.

이는 b_1과b_2 가 β_1 and β_2.에 대한 최우수 선형 불편 추정량 (**BLUE**, the Best Linear Unibiased Estimator) 임을 의미함

Gauss Markov Theorem의 의미

1. b_1 과 b_2 는 선형이고 불편인 추정량의 범주내에서 "최우수(best)"임
2. "최우수(Best)"라함은 선형/불편 추정량 가운데 가장 작은 분산을 가짐을 의미함
3. 가우스 마코프 정리가 성립하기 위해서는 처음 다섯개의 가정들 모두가 만족되어야 함.
4. 가우스 마코프 정리는 여섯번째 가정, 즉 정규분포에 대한 가정은 필요로하지 않음
5. 가우스 마코프 정리는 추정량 b_1 및 b_2 에 적용되는 것이며 특정한 표본값(즉 추정치) b_1 및 b_2 에 적용되는 것이 아님

Gauss Markov Theorem의 의미

7. 선형불편추정량의 범주에 추정을 국한시키지 않는다면 가우스 마코프 정리는 더 이상 의미를 갖지 않으며 비선형 혹은/그리고 편향 (biased) 추정량을 대신 사용할 수도 있음 (Note: 편향 혹은 비선형 추정량이 가우스 마코프 정리를 만족시키는 추정량보다 더 작은 분산을 가질 수 있음). 하지만 선형불편추정량에 우리의 관심을 국한시키는 한 더 이상 다른 추정량을 탐구할 필요는 없음

최소제곱추정량의 확률분포

계량경제학 4.19

y_t 와 ε_t 가 정규분포를 하는 경우

β_2의 최소제곱추정량은 y_t'들의 선형결합으로 표현될 수 있음

$$b_2 = \Sigma w_t y_t$$

$$\text{where } w_t = \frac{(x_t - \bar{x})}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

정규분포를 하는 확률변수의 선형결합은 정규분포를 하게 되므로 b_1와 b_2가 정규분포를 함을 의미함

최소제곱추정량의 확률분포

계량경제학 4.20

중심극한정리(CLT)하에서 정규분포

가우스 마코프 정리의 다섯개의 가정들이 성립하고 표본의 크기 T가 충분히 크다면, 최소제곱추정량 b_1 과 b_2의 분포는 정규분포로 근사(approximation)할 수 있으며 표본의 크기가 클 수록 근사의 정확도는 커짐

최소제곱추정량의 확률분포

계량경제학 4.21

$$b_1 \sim N\left[\beta_1, \frac{\sigma^2 \Sigma x_t^2}{T\,\Sigma(x_t - \bar{x})^2}\right]$$

$$b_2 \sim N\left[\beta_2, \frac{\sigma^2}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2}\right]$$

참고 - 일치추정량(Consistent Estimator)

계량경제학 4.22

표본의 크기 T가 무한히 커질 경우 추정량 b_1과 b_2가 그 모수값(true population value), β_1과 β_2로 (확률적으로)수렴하는 것이 바람직함 – 일치성

이러한 일치성(consistency)를 달성하는 하나의 방법은 b_1과 b_2 의 분산이 T가 무한대로 감에 따라 0이 되는 것임

최소제곱추정량 b_1과 b_2의 분산의 공식은 그들의 분산이 실제로 T가 무한히 커짐에 따라 0으로 가게 되는 것을 보여주고 있음. 따라서 b_1과 b_2는 β_1과 β_2의 일치추정량임

오차항의 분산 σ^2에 대한 추정

계량경제학 4.23

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \Sigma\varepsilon_t^2/T \quad ?$$

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - b_1 - b_2 x_t \quad \Rightarrow \quad \Sigma\hat{\varepsilon}_t^2/T \quad ?$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2}$$

$\hat{\sigma}^2$ 는 σ^2 의 불편추정량임

오차항의 분산 σ^2에 대한 추정

계량경제학 4.24

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{Var}(b_1),\ \widehat{Var}(b_2)$$

$$S.E.(b_i) = \sqrt{\widehat{Var}(b_i)}$$

표준오차(Standard Error)

최소제곱 예측치 $\hat{y}$

설명변수의 값 x_o가 주어졌을 때,
종속변수의 값 y_o를 예측하고자 할 경우

최소제곱예측치는:

$$\hat{y}_o = b_1 + b_2 x_o$$

(4-3)에 대한 도출 과정

$$b_2 = \frac{T\sum x_t y_t - \sum x_t \sum y_t}{T\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}$$

$$= \frac{T\sum x_t\left(\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t\right) - \sum x_t \sum\left(\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t\right)}{T\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}$$

$$= \frac{T\beta_1\sum x_t + T\beta_2\sum\left(x_t\right)^2 + T\sum x_t\varepsilon_t - T\beta_1\sum x_t - \beta_2\left(\sum x_t\right)^2 - \sum x_t\sum\varepsilon_t}{T\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}$$

$$= \frac{T\beta_2\sum\left(x_t\right)^2 - \beta_2\left(\sum x_t\right)^2 + T\sum x_t\varepsilon_t - \sum x_t\sum\varepsilon_t}{T\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}$$

b_1의 불편성에 대한 증명

$$b_1 = \overline{y} - b_2\overline{x}$$

$$E\left(b_1\right) = E\left(\overline{y}\right) - \overline{x}E\left(b_2\right)$$

$$= E\left(\tfrac{1}{T}\sum\left(\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t\right)\right) - \beta_2\overline{x}$$

$$= E\left(\beta_1 + \beta_2\overline{x} + \tfrac{1}{T}\sum\varepsilon_t\right) - \beta_2\overline{x} = \beta_1$$

(4-4)와 (4-5)에 대한 도출 과정

$$\sum(x_t - \overline{x})^2 = \sum x_t^2 - 2\overline{x}\sum x_t + T\,\overline{x}^2 = \sum x_t^2 - 2\overline{x}\left(T\frac{1}{T}\sum x_t\right) + T\,\overline{x}^2$$

$$= \sum x_t^2 - 2T\,\overline{x}^2 + T\,\overline{x}^2 = \sum x_t^2 - T\,\overline{x}^2$$

$$= \sum x_t^2 - \overline{x}\sum x_t = \sum x_t^2 - \frac{\left(\sum x_t\right)^2}{T}$$

$$\sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y}) = \sum x_t y_t - T\overline{x}\,\overline{y} = \sum x_t y_t - \frac{\sum x_t \sum y_t}{T}$$

$$b_2 = \frac{\sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sum(x_t - \overline{x})^2} = \frac{T\sum x_t y_t - \sum x_t \sum y_t}{T\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}$$

(4-4)와 (4-5)에 대한 도출 과정-계속

$$\sum(x_t - \overline{x}) = 0$$

$$b_2 = \frac{\sum(x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sum(x_t - \overline{x})^2} = \frac{\sum(x_t - \overline{x})y_t - \overline{y}\sum(x_t - \overline{x})}{\sum(x_t - \overline{x})^2}$$

$$= \frac{\sum(x_t - \overline{x})y_t}{\sum(x_t - \overline{x})^2} = \sum\left[\frac{(x_t - \overline{x})}{\sum(x_t - \overline{x})^2}\right]y_t = \sum w_t y_t$$

$$b_2 = \sum w_t y_t = \sum w_t(\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t)$$

$$= \beta_1\sum w_t + \beta_2\sum w_t x_t + \sum w_t\varepsilon_t$$

(4-4)와 (4-5)에 대한 도출 과정-계속

$$\sum w_t = \sum\left[\frac{(x_t - \overline{x})}{\sum(x_t - \overline{x})^2}\right] = \frac{1}{\sum(x_t - \overline{x})^2}\sum(x_t - \overline{x}) = 0$$

$$\sum(x_t - \overline{x})^2 = \sum(x_t - \overline{x})(x_t - \overline{x})$$

$$= \sum(x_t - \overline{x})x_t - \overline{x}\sum(x_t - \overline{x}) = \sum(x_t - \overline{x})x_t$$

$$\sum w_t x_t = \frac{\sum(x_t - \overline{x})x_t}{\sum(x_t - \overline{x})^2} = \frac{\sum(x_t - \overline{x})x_t}{\sum(x_t - \overline{x})x_t} = 1$$

$$b_2 = \beta_1\sum w_t + \beta_2\sum w_t x_t + \sum w_t\varepsilon_t$$

$$= \beta_2 + \sum w_t\varepsilon_t$$

b_2의 분산

$$\text{var}(b_2) = \text{var}\left(\beta_2 + \sum w_t \varepsilon_t\right) = \text{var}\left(\sum w_t \varepsilon_t\right) \qquad [\text{since } \beta_2 \text{ is a constant}]$$

$$= \sum w_t^2 \,\text{var}(\varepsilon_t) \qquad [\text{using } \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0]$$

$$= \sigma^2 \sum w_t^2 \qquad [\text{using } \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2]$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

$$\sum w_t^2 = \sum \left[\frac{(x_t - \bar{x})^2}{\left\{ \sum (x_t - \bar{x})^2 \right\}^2} \right] = \frac{1}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

b_1 의 분산

$$Var(b_1) = E\left[(b_1 - \beta_1)^2 \right] = E\left[\left(\bar{y} - b_2\bar{x} - (\bar{y} - \beta_2\bar{x} - \bar{\varepsilon}) \right)^2 \right]$$

$$= E\left[\left(-\bar{x}(b_2 - \beta_2) + \bar{\varepsilon} \right)^2 \right]$$

$$= \bar{x}^2 E\left[(b_2 - \beta_2)^2 \right] + E\left[\bar{\varepsilon}^2 \right] \quad \left(\because E\left[\bar{\varepsilon}(b_2 - \beta_2) \right] = 0 \right)$$

$$= \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} + \frac{1}{T^2} E\left[\sum \varepsilon_t \sum \varepsilon_s \right] = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} + \frac{\sigma^2}{T}$$

$$= \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum (x_t - \bar{x})^2 \right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum x_t^2 - 2\bar{x} \sum x_t + T\bar{x}^2 \right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum x_t^2 - 2T\bar{x}^2 + T\bar{x}^2 \right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sigma^2 \left[\sum x_t^2 \right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}$$

b_1 ,b_2의 공분산

$\text{Cov}(b_1, b_2) = E\{[b_1 - E(b_1)][b_2 - E(b_2)]\}$

$= E\{[b_1 - \beta_1][b2 - E(b2)]\}$

$= E\{[(\bar{y} - b_2\bar{x}) - (\bar{y} - \beta_2\bar{x} - \bar{\varepsilon})][b_2 - \beta_2]\}$

$= E\{[(\bar{y} - b_2\bar{x}) - (\bar{y} - \beta_2\bar{x})][b_2 - \beta_2]\}$

$= E\{[-\bar{x}(b_2 - \beta_2)][b_2 - \beta_2]\}$

$= -\bar{x}\, E(b_2 - \beta_2)^2$

$= -\bar{x}[\, \boldsymbol{\sigma^2 / \sum (x_i - \bar{x})^2}]$

$$E\left(\bar{\varepsilon}(b_2 - \beta_2) \right) = \frac{1}{T} E\left(\sum \varepsilon_t \sum w_s \varepsilon_s \right)$$

$$= \frac{1}{T} E\left(\sum w_t \varepsilon_t^2 + \sum_{t \neq s} w_t \varepsilon_t \varepsilon_s \right)$$

$$= \frac{1}{T} E\left(\sum w_t \varepsilon_t^2 \right) = \frac{1}{T} \sigma^2 \left(\sum w_t \right) = 0$$

Proof of the Gauss–Markov Theorem

$b_2^* = \sum k_t y_t$

(where the k_t are constants) be any other linear estimator of β_2.

- Suppose that

$k_t = w_t + c_t$

, where c_t is another constant and w_t is given in equation (4.4).

- Into this new estimator substitute y_t and simplify, using the properties of w_t.

$$b_2^* = \sum k_t y_t = \sum (w_t + c_t) y_t = \sum (w_t + c_t)(\beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t)$$

$$= \sum (w_t + c_t)\beta_1 + \sum (w_t + c_t)\beta_2 x_t + \sum (w_t + c_t)\varepsilon_t$$

$$= \beta_1 \sum w_t + \beta_1 \sum c_t + \beta_2 \sum w_t x_t + \beta_2 \sum c_t x_t + \sum (w_t + c_t)\varepsilon_t$$

$$= \beta_1 \sum c_t + \beta_2 + \beta_2 \sum c_t x_t + \sum (w_t + c_t)\varepsilon_t \qquad (4.6)$$

since $\Sigma w_t = 0$ and $\Sigma w_t x_t = 1$.

Proof of the Gauss–Markov Theorem

$$E(b_2^*) = \beta_1 \sum c_t + \beta_2 + \beta_2 \sum c_t x_t + \sum (w_t + c_t) E(\varepsilon_t)$$

$$= \beta_1 \sum c_t + \beta_2 + \beta_2 \sum c_t x_t \qquad (4.7)$$

In order for the linear estimator $b_2^* = \sum k_t y_t$ to be unbiased it must be true that

$$\sum c_t = 0 \text{ and } \sum c_t x_t = 0 \qquad (4.8)$$

These conditions must hold in order for

$b_2^* = \sum k_t y_t$

to be in the class of *linear* and *unbiased estimators*.

Proof of the Gauss–Markov Theorem

So we will assume the conditions (4.8) hold and use them to simplify expression (4.6):

$$b_2^* = \sum k_t y_t = \beta_2 + \sum (w_t + c_t)\varepsilon_t \qquad (4.9)$$

We can now find the variance of the linear unbiased estimator

Using the additional fact that

$$\sum c_t w_t = \sum \left[\frac{c_t (x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right] = \frac{1}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \sum c_t x_t - \frac{\bar{x}}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \sum c_t = 0$$

- Use the properties of variance to obtain:

$$\text{var}(b_2^*) = \text{var}\left(\beta_2 + \sum (w_t + c_t)\varepsilon_t \right) = \sum (w_t + c_t)^2 \,\text{var}(\varepsilon_t)$$

$$= \sigma^2 \sum (w_t + c_t)^2 = \sigma^2 \sum w_t^2 + \sigma^2 \sum c_t^2$$

$$= \text{var}(b_2) + \sigma^2 \sum c_t^2$$

$$\geq \text{var}(b_2) \ \text{ since } \sum c_t^2 \geq 0 \qquad (4.10)$$

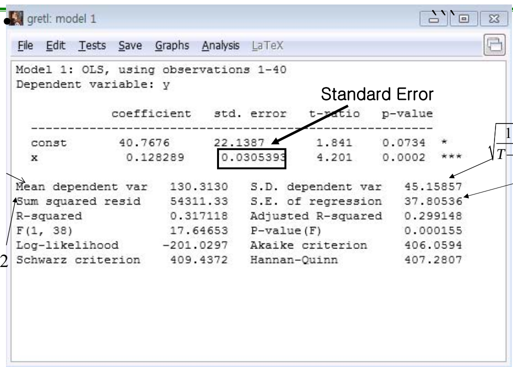
The Proof of unbiased estimator of σ^2

$$\varepsilon_t = y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t \;\Rightarrow\; \bar{\varepsilon} = \bar{y} - \beta_1 - \beta_2 \bar{x}$$
$$\Rightarrow\; \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} = y_t - \bar{y} - \beta_2 (x_t - \bar{x})$$
$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - b_1 - b_2 x_t, \quad 0 = \bar{y} - b_1 - b_2 \bar{x} \;\Rightarrow\; \hat{\varepsilon}_t = y_t - \bar{y} - b_2 (x_t - \bar{x})$$
$$\hat{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} + \beta_2 (x_t - \bar{x}) - b_2 (x_t - \bar{x})$$
$$= -(b_2 - \beta_2)(x_t - \bar{x}) + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$$
$$\sum (\hat{\varepsilon}_t)^2 = (b_2 - \beta_2)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 + \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$$
$$- 2 (b_2 - \beta_2) \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

The Proof of unbiased estimator of σ^2

$$E\left(\sum (\hat{\varepsilon}_t)^2\right) = E\left((b_2 - \beta_2)^2\right) \sum (x_t - \bar{x})^2 + E\left(\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right)$$
$$- 2E\left((b_2 - \beta_2) \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right)$$
$$E\left(\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right) = \sum E\left(\varepsilon_t^2 - 2\varepsilon_t \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2\right) = \sum E\left(\varepsilon_t^2\right) - 2\sum E\left(\varepsilon_t \bar{\varepsilon}\right) + TE\left(\bar{\varepsilon}^2\right)$$
$$= T\sigma^2 - \frac{2}{T} \sum E\left(\varepsilon_t^2 + \varepsilon_t \sum_{j \neq t} \varepsilon_j\right) + \frac{1}{T} E\left(\sum \varepsilon_t^2 + \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j\right)$$
$$= T\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2 = (T-1)\sigma^2$$
$$-2E\left((b_2 - \beta_2) \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right) = -2\sum (x_t - \bar{x}) E\left((\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) \sum w_j \varepsilon_j\right)$$
$$= -2\sum (x_t - \bar{x}) E\left(w_t \varepsilon_t^2 - \frac{1}{T} \sum w_j \varepsilon_j^2\right)$$
$$= -2\sigma^2 \sum (x_t - \bar{x})(w_t - \bar{w}) = -2\sigma^2$$

Example




```
Model 1: OLS, using observations 1-40
Dependent variable: y

             coefficient   std. error   t-ratio   p-value
  ---------------------------------------------------------
  const        40.7676      22.1387      1.841    0.0734   *
  x             0.128289     0.0305393   4.201    0.0002   ***

Mean dependent var   130.3130   S.D. dependent var   45.15857
Sum squared resid    54311.33   S.E. of regression   37.80536
R-squared            0.317118   Adjusted R-squared   0.299148
F(1, 38)             17.64653   P-value(F)           0.000155
Log-likelihood      -201.0297   Akaike criterion     406.0594
Schwarz criterion    409.4372   Hannan-Quinn         407.2807
```

Standard Error

$\bar{y}$

$\sum \hat{\varepsilon}^2$

$\sqrt{\frac{1}{T-1}\sum (y_t - \bar{y})^2}$

$\hat{\sigma}$

b_1 의 분산

$$Var(b_1) = E\left[(b_1 - \beta_1)^2\right] = E\left[\left(\bar{y} - b_2 \bar{x} - (\bar{y} - \beta_2 \bar{x} - \bar{\varepsilon})\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(-\bar{x}(b_2 - \beta_2) + \bar{\varepsilon}\right)^2\right]$$
$$= \bar{x}^2 E\left[(b_2 - \beta_2)^2\right] + E\left[\bar{\varepsilon}^2\right] \quad \left(\because E\left[\bar{\varepsilon}(b_2 - \beta_2)\right] = 0\right)$$
$$= \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} + \frac{1}{T^2} E\left[\sum \varepsilon_t \sum \varepsilon_s\right] = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} + \frac{\sigma^2}{T}$$
$$= \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum (x_t - \bar{x})^2\right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}$$
$$= \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum x_t^2 - 2\bar{x} \sum x_t + T\bar{x}^2\right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2 \left[T\bar{x}^2 + \sum x_t^2 - 2T\bar{x}^2 + T\bar{x}^2\right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}$$
$$= \frac{\sigma^2 \left[\sum x_t^2\right]}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}$$