제 5 강

단순 회귀모형에서의 추론
(Inference in the Simple Regression Model)

단순 선형회귀 모형 가정

1. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
2. $E(\varepsilon_t) = 0 \quad <=> \quad E(y_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$
3. $var(\varepsilon_t) = \sigma^2 = var(y_t)$
4. $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = cov(y_i, y_j) = 0$
5. x_t is not random and $x_t \neq x_s$ for at least one pair of (t,s).
6. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) <=> y_t \sim N(\beta_1 + \beta_2 x_t, \sigma^2)$

최소제곱추정량의 성질

최소제곱추정량

1. 불편추정량 $E(b_1) = \beta_1$ $E(b_2)=\beta_2$

$\boxed{\text{유효성(efficiency)}}$

2. 최소분산 (가우스-마코프 정리)

$$Var(b_1) = \frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{T \sum (x_t - \bar{x})^2} \quad Var(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$$

3. 일치성: T가 커짐에 따라 추정량이 더 정확해짐

4. $b_1 \sim N\left[\beta_1, Var(b_1)\right]$ $b_2 \sim N\left[\beta_2, Var(b_2)\right]$

최소제곱추정량의 성질

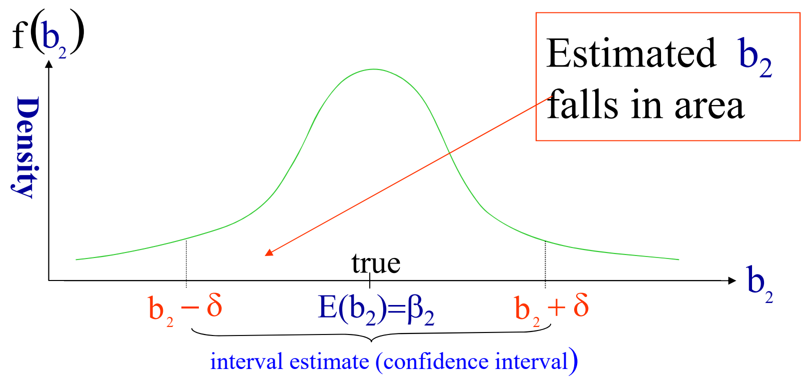
최소제곱잔차

1. $\sum \hat{\varepsilon}_t = 0$
2. $\sum \hat{\varepsilon}_t x_t = 0$
3. $\sum \hat{\varepsilon}_t \hat{y}_t = 0$
4. 회귀선은 반드시 x 와 y의 표본평균 $(\bar{x}, \bar{y})$를 통과함.
5. $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2}$: σ^2 의 불편추정량

최소제곱추정량은 얼마나 신뢰할만한가?

구간추정량(대칭적 분포의 경우)

b_1이 β_1 에 얼마나 "가까운가"?
b_2가 β_2 에 얼마나 "가까운가"?



최소제곱추정량은 얼마나 신뢰할만한가?

구간추정량(대칭적 분포의 경우)

$$\Pr(b_2-\delta < \beta_2 < b_2+\delta) = (1-\alpha) \begin{cases} 0.99 \\ 0.95 \\ 0.90 \end{cases}$$

$$\alpha \begin{cases} 0.01 \\ 0.05 \\ 0.10 \end{cases}$$

α:유의수준(level of significance)이라 함.

$b_2 \pm \delta$ 는 β_2에 대한 $(1-\alpha)\times 100$ % 구간추정(치)
또는 $(1-\alpha)\times 100$ % 신뢰구간이라함

b_2 가 확률변수라면, $b_2 \pm \delta$ 는
구간추정량이라고 함

구간추정량의 도출-계속

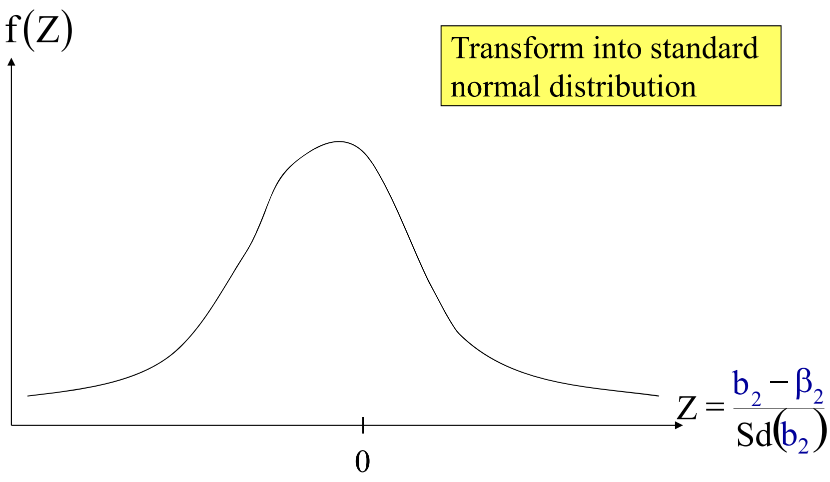
정규분포의 가정을 이용하여 σ^2 가 알려져 있다는 전제하에 b_2에 대한 다음과 같은 확률적 명제가 제시될 수 있음

$$Z = \frac{b_2 - \beta_2}{Sd(b_2)} \sim N(0,1)$$

$$= (b_2 - \beta_2)\frac{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}}{\sigma}$$

실제에 있어서 관측되지 않음

구간추정량의 도출-계속

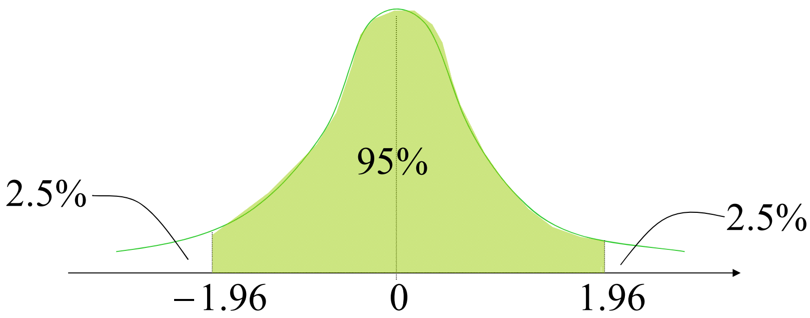


구간추정량의 도출-계속

For example:

Pr(Z>1.96)=Pr(Z<-1.96)=0.025

From the table



구간추정량의 도출-계속

$$\Pr(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$$

$$\Rightarrow \quad \Pr\left[-1.96 < \frac{b_2 - \beta_2}{\mathrm{Sd}(b_2)} < 1.96\right] = 0.95$$

95% interval estimator:

$$-1.96 < \frac{b_2 - \beta_2}{\mathrm{Sd}(b_2)} < 1.96$$

$$\Rightarrow \quad b_2 - \boxed{1.96 \times \mathrm{Sd}(b_2)} < \beta_2 < b_2 + \boxed{1.96 \times \mathrm{Sd}(b_2)}$$

$$\Rightarrow \quad b_2 \pm 1.96 \times \mathrm{Sd}(b_2)$$

구간추정량의 도출-계속

실제로는 σ^2 가 알려지지 않으며, 따라서
그에 대한 불편추정량을 사용해야 함

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2} \quad \Rightarrow \quad \hat{var}(b_2) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\Sigma(x_t - \bar{x})^2}$$

$$Se(b_2) = \sqrt{\hat{var}(b_2)}$$

이 경우 정규분포 대신 t-분포를 사용함

$$t \equiv \frac{(b_2 - \beta_2)}{Se(b_2)} \sim t_{(T-2)}$$

이 t는 자유도가 T- 2인 t-분포(Student t-distribution)를 함

구간추정량의 도출-계속

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{Se(b_2)}$$

$$t = \frac{\text{추정량 - 모수}}{\text{추정량의 표준오차}}$$

$$t = \frac{(b_2 - \beta_2)\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}}{\hat{\sigma}}$$

이 t를 이용하여 β_2에 대한 신뢰구간을
구축할 수 있음

구간추정량의 도출-계속

β_2 에 대한 구간추정량을 t분포로부터의
임계값(critical value) t^c를 이용하여 다음과 같이 구축할 수 있음

$$\Pr\left[-t^c_{\frac{\alpha}{2},\,T-2} \le t \le t^c_{\frac{\alpha}{2},\,T-2}\right] = 1-\alpha$$

From the table

α : 유의수준(level of significance)

(T-2) : 자유도(degree of freedom)

(2개의 모수를 추정할 경우).

구간추정량의 도출-계속

따라서

$$\Pr\left(-t^c_{0.05\,,\,T-2} \le \frac{b_2-\beta_2}{Se(b_2)} \le t^c_{0.05\,,\,T-2}\right) = 0.90$$

$\Pr(-t^c_{0.025,\,T-2} \le (b_2-\beta_2)/Se(b_2) \le t^c_{0.025,\,T-2}) = 0.95$

다시 정리하면,

$$\Pr\left(b_2 - t^c_{0.05\,,\,T-2} \times Se(b_2) \le \beta_2 \le b_2 + t^c_{0.05,\,T-2} \times Se(b_2)\right)$$

$= 0.90$

구간추정량의 도출-계속

$b_2 \pm t^c_{0.05,\ T-2} \times Se(b_2)$: β_2 에 대한 90% 구간추정량

$\boxed{t^c_{0.05,\ T-2}}$ Check it from t-table $\boxed{b_2 \ \& \ Se(b_2)}$ Check it from estimated result

β_2 에 대한 95% 구간추정량은

$$b_2 \pm t^c_{0.025,\ T-2} \times Se(b_2)$$

구간추정량의 도출-계속

실례: 5.1.4

식료품 지출에 대한 자료 (관측치의 수: 40)를 가지고 β_2에 대한 95% 신뢰구간을 구축

임계값 $t_c = 2.024$ (from the table)

최소제곱추정치: $b_2 = .1283$
그리고 그 표준오차: $se(b_2) = 0.0305$

$$b_2 \pm t_c se(b_2) = .1283 \pm 2.024(.0305) = [.0666, .1900]$$

δ

가설검정 (Hyphothesis Testing)

많은 경제적 결정에 있어서, 어떤 모수가 특정한 값 또는 부호를 갖는지 여부를 알고자 하는 경우가 있음

$\beta_2 \neq 0$?, $\beta_2 = 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_2 < 0$ … :추측들

추정된 b_2로부터, 이 추측들을 검정(test)할 수 있음 ⇒ 가설검정(Hyphothesis Testing)

가설검정 (Hyphothesis Testing)

요소

1. 귀무가설(null hypothesis) H_0.
2. 대립가설(alternative hypothesis) H_1.
3. 검정통계량(test statistic).
4. 기각역(rejection region).

구성

1. 귀무가설과 대립가설을 결정함.
2. 검정통계량을 정하고 귀무가설이 참일 경우의그 분포를 구체화함
3. 유의수준 α를 정하고 그에 대응되는 기각역을 결정
4. 검정통계량과 관측치으로부터 통계치를 계산함
5. 결론을 기술함

가설검정 (Hyphothesis Testing)

양측검정

1. $H_0 : \beta_2 = c$

   $H_1 : \beta_2 \neq c$

   가설을 기술

2. $t = \dfrac{b_2 - c}{Se(b_2)}$

   검정통계량 결정 및 통계치 계산

3. t분포표로부터 임계값 계산: $t^c_{\frac{\alpha}{2}, T-2}$

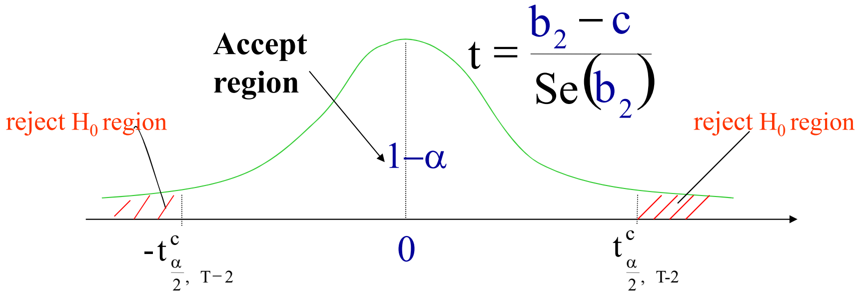
가설검정 (Hyphothesis Testing)

양측검정

4. t 와 t^c를 비교함

5. 결정원칙: 만약 $t \geq t^c$ 이거나 $t \leq -t^c$ 이면(즉 $|t| \geq t^c$), H_0을 기각함

$$t = \frac{b_2 - c}{Se(b_2)}$$



가설검정 (Hyphothesis Testing)

단측검정

Step 1: $H_0 : \beta_2 = c \quad (H_0 : \beta_2 = c\ )$

$H_1 : \beta_2 > c \quad (H_1 : \beta_2 < c\ )$

가설을 기술함

Step 2: $t = \dfrac{b_2 - c}{Se(b_2)}$ 통계치를 계산

Step 3: t분포표에서 $t^{c}_{\alpha,\ T-2}$ 를 찾아 임계값를 정함

Step 4: t^c 와 t를 비교함

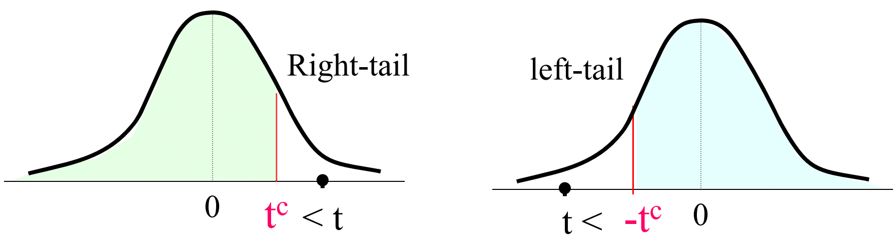
가설검정 (Hyphothesis Testing)

단측검정

Step 5: If $t \geq t^c$ ==> H_0 를 기각함

If $t < t^c$ ==> H_0 를 기각 않음

우측꼬리
Right-tail



(If $t \leq - t^c$ ==> H_0를 기각함)

(If $t > - t^c$ ==> H_0 를 기각 않음)

좌측꼬리
Left-tail

가설검정 (Hyphothesis Testing)

제 1 종 및 제 2 종 오류

- 제 1종 오류(Type I error):
  - 귀무가설이 옳음에도 그것을 기각하는 오류를 범함

    α = P(rejecting H_0 when it is true).

- 제 2종 오류(Type II error):
  - 귀무가설이 그름에도 그것을 기각하지 못하는 오류를 범함

    β = P(failing to reject H_0 when it is false).

가설검정 (Hyphothesis Testing)

제 2 종 오류

1. 제 2종 오류의 확률은 검정의 유의수준(제 1종 오류의 확률) α의 크기와 역의(inversely)관계에 있음
2. 대립가설에서 가설로 제시된 모수의 값이 모수의 참값에 가까울 수록 제 2종 오류의 확률은 커짐
3. 표본의 크기 T가 클 수록, 제 1종 오류 α가 주어졌을 때 제 2종 오류의 확률은 작아짐
4. 앞서 소개한 t분포에 기반한 검정은 매우 좋은 검정방법으로 알려져 있음 (즉 주어진 유의수준에 대해 낮은 제 2종 오류의 확률을 가짐) :
   - 검정력(Power)=1-β ⇒검정력이 높은 검정(powerful test)

가설검정 (Hyphothesis Testing)

P-값 (p-value)

P-값 $=2\times\Pr(t\geq |t$ 검정통계량의 표본값$|)$
: 양측 t검정

P-값 $=\Pr(t\geq t$ 검정통계량의 표본값$)$
: 우측꼬리 t검정

P-값 $=\Pr(t\leq t$ 검정통계량의 표본값$)$
: 좌측꼬리 t검정

가설검정 (Hyphothesis Testing)

유의성 검정(test of significance)

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

이 귀무가설의 기각은 x와 y사이에 "통계적으로 유의한(Statistically Significant)" 관계가 존재함을 의미

$$t^* = \frac{b_2}{Se(b_2)}$$

: 통계패키지의 회귀분석 결과 보고시 자동으로 계산하여 보고됨

최소제곱예측 (Least Squares Predictor)

x_0 가 주어졌을 때, $y_0=\beta_1+\beta_2 x_0+\varepsilon_0$에 대한 최소제곱예측(값) :

$$\hat{y}_0 = b_1 + b_2 x_0$$

예측오차 : $f \equiv \hat{y}_0 - y_0$

$$E(f) = E(b_1-\beta_1+(b_2-\beta_2)x_0-\varepsilon_0)=0$$

$$\mathrm{var}(f) = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{\Sigma(x_t-\bar{x})^2}\right]$$

최소제곱예측 (Least Squares Predictor)

$$\widehat{\mathrm{var}}(f) = \hat{\sigma}^2\left[1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{\Sigma(x_t-\bar{x})^2}\right]$$

$$\mathrm{se}(f) = \sqrt{\widehat{\mathrm{var}}(f)}$$

x_0 가 주어졌을 때, y_0에 대한 $(1-\alpha)\times 100\%$ 예측구간(prediction interval) :

$$\hat{y}_0 \pm t^c_{\frac{\alpha}{2},T-2}\mathrm{se}(f)$$

유효성 (Efficiency)

추정량이 유효하다는 것은 추정량의 값이 추정하고자 하는 모수에 가까울 것으로 기대할 수 있음을 의미함

일반적으로 α의 추정량 a의 유효성은 다음의 척도(Mean Squared Error:평균제곱오차)로서 비교된다

$$\begin{aligned} E\left[(a-\alpha)^2\right] &= E\left[(a-E(a)+E(a)-\alpha)^2\right] \\ &= E\left[(a-E(a))^2\right]+E\left[(E(a)-\alpha)^2\right]+2E\left[(E(a)-\alpha)(a-E(a))\right] \\ &= Var(a)+(E(a)-\alpha)^2+2(E(a)-\alpha)E\left[(a-E(a))\right] \\ &= Var(a)+(E(a)-\alpha)^2 \end{aligned}$$

즉 분산 + 편차의 제곱의 합

잔차의 성질

정규방정식

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0 \Rightarrow \sum y_t - Tb_1 - b_2 \sum x_t = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_2} = 0 \Rightarrow \sum y_t x_t - b_1 \sum x_t - b_2 \sum x_t^2 = 0$$

1. $\sum \hat{\varepsilon}_t = \sum (y_t - b_1 - b_2 x_t) = \sum y_t - Tb_1 - b_2 \sum x_t = 0$

2. $\sum \hat{\varepsilon}_t x_t = \sum (y_t - b_1 - b_2 x_t) x_t = \sum (y_t x_t - b_1 x_t - b_2 x_t^2)$
   $= \sum y_t x_t - b_1 \sum x_t - b_2 \sum x_t^2 = 0$

3. $\sum \hat{\varepsilon}_t \hat{y}_t = \sum \hat{\varepsilon}_t (b_1 + b_2 x_t) = b_1 \sum \hat{\varepsilon}_t + b_2 \sum \hat{\varepsilon}_t x_t = 0$

참고 – t 분포의 도출

t 분포의 정의

$$V \equiv Z_1^2 + \ldots + Z_m^2 \sim \chi^2(m)$$

Where $Z_1, \ldots, Z_m$ are m independent N(0,1)

$$t \equiv \frac{Z}{\sqrt{V/m}} \sim t_{(m)}$$

where $Z \sim N(0,1)$

and $V \sim \chi^2_{(m)}$

and Z and V are statistically independent

참고 – t 분포의 도출

t 분포의 성질

1. t-분포나 정규분포 모두 대칭인 종모양(bell-shaped)의 분포를 함
2. t-분포의 경우 정규분포에 비해 꼬리부분이 두꺼움
3. 표본의 크기가 커질 경우 t분포는 정규분포로 수렴함
4. T분포는 자유도에 의해 그 분포가 결정됨.
5. 자유도가 30이상인 경우 정규분포는 t분포에 대해 소수점 이하 몇 자리까지의 정확성을 지니는 훌륭한 근사임

We can show the following;

$$V \equiv \frac{\sum_{t=1} \hat{\varepsilon}_t^2}{\sigma^2} = \frac{(T-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{T-2}$$

Intuition?

. $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \rightarrow (\varepsilon_t/\sigma) \sim N(0,1)$

.Therefore, $\Sigma_{t=1}(\varepsilon_t/\sigma)^2 \sim \chi^2_{(T)}$

. ε_t is unobservable. Then $\Sigma_{t=1}(\hat{\varepsilon}_t/\sigma)^2 \sim$?

We can show that V is statistically independent of the least squares estimators b_1, b_2

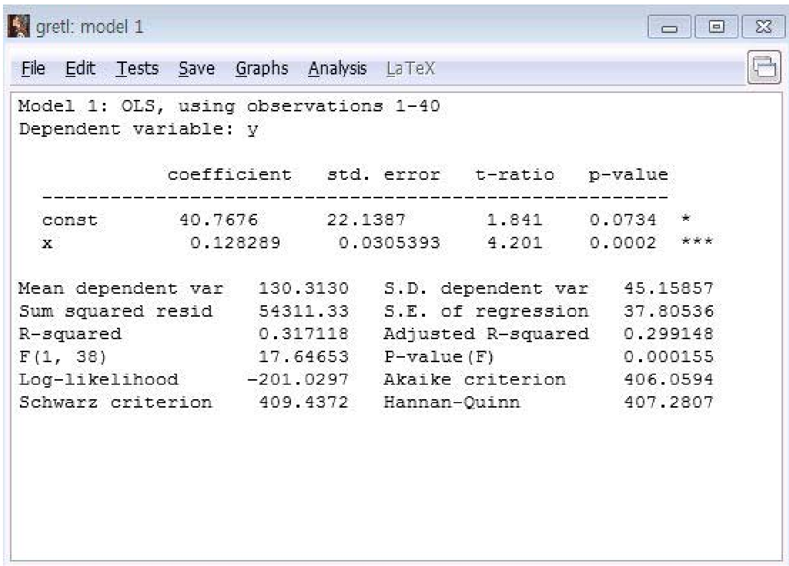
Let $Z = \dfrac{(b_2 - \beta_2)}{\sqrt{\text{var}(b_2)}}$ $\quad V = \dfrac{(T-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$

Let $t = \dfrac{Z}{\sqrt{V/(T-2)}}$

참고 – t 분포의 도출

$$t = \frac{\dfrac{(b_2 - \beta_2)}{\sqrt{\mathrm{var}(b_2)}}}{\sqrt{\dfrac{(T-2)\,\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \Big/ (T-2)}} = \frac{(b_2 - \beta_2)}{\mathrm{Se}(b_2)}$$

실례



최소제곱예측오차의 분포

$f \sim N(0, \mathrm{var}(f))$: normal error term or large T

$$\Rightarrow \frac{f}{\sqrt{\mathrm{var}(f)}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{f}{\sqrt{\widehat{\mathrm{var}}(f)}} = \frac{f}{\mathrm{se}(f)} \sim t_{(T-2)}$$

$$\Rightarrow P[-t^c_{\frac{\alpha}{2},T-2} \le \frac{\hat{y}_0 - y_0}{\mathrm{se}(f)} \le t^c_{\frac{\alpha}{2},T-2}] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P[\hat{y}_0 - t^c_{\frac{\alpha}{2},T-2}\mathrm{se}(f) \le y_0 \le \hat{y}_0 + t^c_{\frac{\alpha}{2},T-2}\mathrm{se}(f)] = 1-\alpha$$

$\Rightarrow \hat{y}_0 \pm t^c_{\frac{\alpha}{2},T-2}\mathrm{se}(f)$: $100 \times \alpha\%$ Prediction Interval