제 8 강

다중회귀모형-2

The Multiple Regression Model - II

t-검정

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \beta_4 X_{t4} + \varepsilon_t$$

t-검정은 모수들의 임의의 선형결합에 대한 가설에 대해서도 사용될 수 있음

$\boxed{H_0: \beta_1 = 0}$ $\boxed{H_0: \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1}$

$\boxed{H_0: 3\beta_2 - 7\beta_3 = 21}$ $\boxed{H_0: \beta_2 - \beta_3 \le 5}$

이러한 t-검정들은 모두 정확히 T−K 자유도를 가짐
단 K= # coefficients estimated(including the intercept).

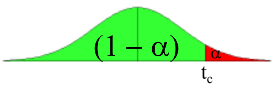
t-검정

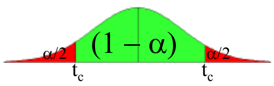
$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \ldots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t$$

In general, $\boxed{H_0: \Sigma c_i \beta_i = c_0}$

$$t = \frac{\Sigma c_i b_i - c_0}{Se(\Sigma c_i b_i)} \sim t_{(T-K)}$$

One Tail Test $\boxed{H_1: \Sigma c_i \beta_i > c_0}$ Two Tail Test $\boxed{H_1: \Sigma c_i \beta_i \ne c_0}$





t-검정

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \varepsilon_t$$

$\boxed{H_0: 3\beta_2 - 7\beta_3 = 21}$ $\boxed{H_1: 3\beta_2 - 7\beta_3 \ne 21}$

$$t = \frac{3b_2 - 7b_3 - 21}{Se(3b_2 - 7b_3)} \sim t_{(T-4)}$$

$$\left.\begin{array}{l} Var(3b_2-7b_3)=3^2Var(b_2)+7^2Var(b_3)-2\times3\times7Cov(b_2,b_3) \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{\Sigma \hat{\varepsilon}_t^2}{T-K} \end{array}\right\} \text{Se( )}$$

공분산 행렬(variance-covariance matrix)을 이용

F-검정

F-분포

If $V_1 \sim \chi^2_{(m_1)}$ and $V_2 \sim \chi^2_{(m_2)}$ and if

V_1 and V_2 are independent, then

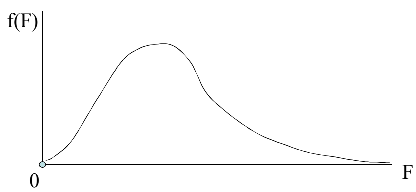
$$F = \frac{V_1 / m_1}{V_2 / m_2} \sim F_{(m_1, m_2)}$$

확률변수 *F*는 m_1 분자 자유도(*numerator degrees of freedom* :df_n)와 m_2 분모 자유도(*denominator degrees of freedom* :df_d)를 가진 *F*분포를 한다고 말함 .

이 확률변수는 (0, ∞)의 구간에서 밀도를 가지며 긴 오른쪽 꼬리를 가지는 모양임

F-검정

F-분포



$$F = \frac{V_1 / m_1}{V_2 / m_2} \sim F_{(m_1, m_2)} \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{V_2 / m_2}{V_1 / m_1} \sim F_{(m_2, m_1)}$$

$$t = \frac{Z}{\sqrt{V/m}} \Rightarrow t^2 = \frac{Z^2}{V/m} = \frac{V_1/1}{V/m} \sim F_{(1,m)}, \; V_1 \equiv Z^2$$

F-검정

일련의 가설들에 대한 *F* 검정은 제약이 없는(unrestricted) 원래의 모형으로부터의 잔차의 제곱의 합과 귀무가설이 참이라는 가정하의 모형으로부터의 잔차의 제곱의 합을 비교하는 것에 기반을 둔 검정방법임

F-검정

- 귀무가설이 참이라는 가정하의 모형으로부터의 잔차의 제곱의 합:
  the *restricted sum of squared errors*, or SSE_R
- 원래의 제약이 없는 모형으로부터의 잔차의 제곱의 합 :
  the *unrestricted sum of squared errors*, or SSE_U

$\Rightarrow$ $SSE_R - SSE_U \geq 0$: Always True. Why?

F-검정

- *J* 가 가설들의 수(즉 제약들의 수)라고 하면 다음이 성립함으로 보일 수 있음

$$V_1 = \frac{SSE_R - SSE_U}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(J)}, \text{ under the null}$$

- 다음의 사실은 이미 살펴본 바 있음.

$$V_2 = \frac{SSE_U}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-K)}$$

- 또한 V_1 과 V_2 가 통계적이 독립임도 보일 수 있음

$$F = \frac{V_1/J}{V_2/(T-K)} = \frac{(SSE_R - SSE_U)/J}{SSE_U/(T-K)} \sim F_{(J,T-K)}, \text{ under the null}$$

F-검정

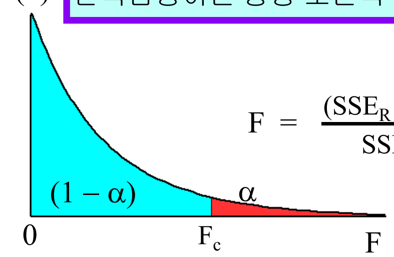
- 귀무가설하에서, 확률변수 *F*는 분자의 자유도 *J*F 분모의 자유도 *T-K* 인 *F*분포를 함
- 대립가설하에서는, SSE_R 과 SSE_U 의 차이가 커지게 됨 (Why?).

*F*검정통계량의 값이 너무 크게 되면 귀무가설을 기각하게 됨

F 값과 분자의 자유도 *J* 분모의 자유도 *T-K* 인 *F* 분포의 오른쪽 꼬리의 확률을 α 로 남기는 임계값 F_C 를 비교하여 기각여부를 판단함

F-검정

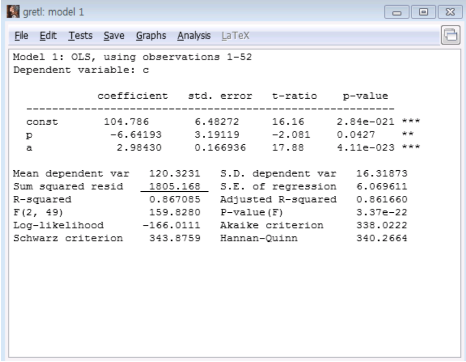
이러한 방식 F-검정에서는 귀무가설로부터의 이탈은 항상 F값을 크게 만들기 때문에 양측검정이든 단측검정이든 항상 오른쪽 꼬리 검정임



$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/J}{SSE_U/(T-K)}$$

F-검정

실례 – 하나의 제약



gretl: model 1

File Edit Tests Save Graphs Analysis LaTeX

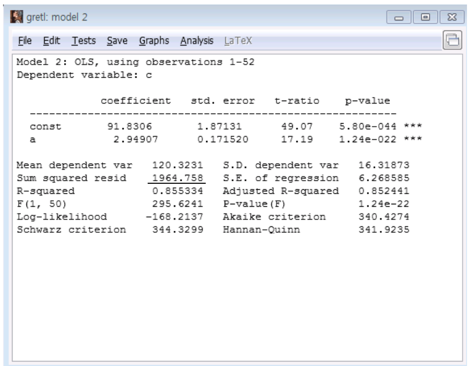
```
Model 1: OLS, using observations 1-52
Dependent variable: c

             coefficient   std. error   t-ratio    p-value
  ---------------------------------------------------------
  const       104.786       6.48272      16.16     2.84e-021 ***
  p            -6.64193     3.19119      -2.081    0.0427    **
  a             2.98430     0.166936     17.88     4.11e-023 ***

Mean dependent var   120.3231   S.D. dependent var   16.31873
Sum squared resid    1805.168   S.E. of regression   6.069611
R-squared            0.867085   Adjusted R-squared   0.861660
F(2, 49)             159.8280   P-value(F)           3.37e-22
Log-likelihood      -166.0111   Akaike criterion     338.0222
Schwarz criterion    343.8759   Hannan-Quinn         340.2664
```

F-검정

실례 – 하나의 제약



```
gretl: model 2
File  Edit  Tests  Save  Graphs  Analysis  LaTeX

Model 2: OLS, using observations 1-52
Dependent variable: c

             coefficient   std. error   t-ratio    p-value
  ---------------------------------------------------------
  const       91.8306       1.87131      49.07    5.80e-044 ***
  a            2.94907      0.171520     17.19    1.24e-022 ***

Mean dependent var   120.3231   S.D. dependent var   16.31873
Sum squared resid    1964.758   S.E. of regression   6.268585
R-squared            0.855334   Adjusted R-squared   0.852441
F(1, 50)             295.6241   P-value(F)           1.24e-22
Log-likelihood      -168.2137   Akaike criterion     340.4274
Schwarz criterion    344.3299   Hannan-Quinn         341.9235
```

F-검정

실례 – 하나의 제약

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \varepsilon_t$$

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/J}{SSE_U/(T-K)} = \frac{(1964.758 - 1805.168)/1}{1805.168/(52-3)} = 4.33$$

$H_0: \beta_2 = 0$

$H_1: \beta_2 \neq 0$

$df_n = J = 1$

$df_d = T - K = 49$

By definition this is the t-statistic squared:

$t = -2.081 \longrightarrow F = t^2 = 4.33$

F-검정

실례 – 하나의 제약

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \ldots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t$$

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/J}{SSE_U/(T-K)}$$

$H_0: \Sigma c_i \beta_i = c_0$

$H_1: H_0$ not true

- SSE_R : the sum of squared errors when the restriction $\Sigma c_i b_i = c_0$ is imposed on the original model
- SSE_U : the sum of squared errors from the original model

$df_n = J = 1$

$df_d = T - K$

F-검정

실례 – 다중 제약

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \beta_4 X_{t4} + \varepsilon_t$$

$H_0: \beta_2 = 0, \beta_4 = 0$

$H_1: H_0$ not true

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/J}{SSE_U/(T-K)}$$

First run the restricted regression by dropping X_{t2} and X_{t4} to get SSE_R.

Next run unrestricted regression to get SSE_U .

$df_n = J = 2$

$df_d = T - K$

F-검정

실례 – 다중제약

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \ldots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t$$

$H_0: \Sigma c_{1i} \beta_i = c_1,\ \Sigma c_{2i} \beta_i = c_2,\ \Sigma c_{3i} \beta_i = c_3$

$H_1: H_0$ not true

$df_n = J = 3$

$df_d = T - K$

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/J}{SSE_U/(T-K)}$$

F-검정

실례 – 모형의 유의성 검정

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \ldots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t$$

$H_0: \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_K = 0$

$H_1: H_0$ not true

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/(K-1)}{SSE_U/(T-K)}$$

F-검정

실례 – 모형의 유의성 검정

```
gretl: model 1
File  Edit  Tests  Save  Graphs  Analysis  LaTeX

Model 1: OLS, using observations 1-52
Dependent variable: c

             coefficient   std. error   t-ratio    p-value
  ---------------------------------------------------------
  const       104.786       6.48272     16.16     2.84e-021 ***
  p            -6.64193     3.19119     -2.081    0.0427    **
  a             2.98430     0.166936    17.88     4.11e-023 ***

Mean dependent var   120.3231   S.D. dependent var   16.31873
Sum squared resid    1805.168   S.E. of regression   6.069611
R-squared            0.867085   Adjusted R-squared   0.861660
F(2, 49)             159.8280   P-value(F)           3.37e-22
Log-likelihood      -166.0111   Akaike criterion     338.0222
Schwarz criterion    343.8759   Hannan-Quinn         340.2664
```


F-검정

실례 – 모형의 유의성 검정

```
gretl: model 2
File  Edit  Tests  Save  Graphs  Analysis  LaTeX

Model 2: OLS, using observations 1-52
Dependent variable: C

             coefficient   std. error   t-ratio    p-value
  ---------------------------------------------------------
  const       120.323       2.26300      53.17    2.43e-046 ***

Mean dependent var   120.3231   S.D. dependent var   16.31873
Sum squared resid    13581.35   S.E. of regression   16.31873
R-squared            0.000000   Adjusted R-squared   0.000000
Log-likelihood      -218.4802   Akaike criterion     438.9605
Schwarz criterion    440.9117   Hannan-Quinn         439.7085
```

$$\frac{(13581.35 - 1805.168)/2}{1805.168/(52-3)} = 159.828$$

비표본정보의 이용

어떤 생산과정이 규모에 대한 수익불변인 Cobb-Douglas로 가정된다고 하자

$$\ln(y_t) = \beta_1 + \beta_2 \ln(X_{t2}) + \beta_3 \ln(X_{t3}) + \beta_4 \ln(X_{t4}) + \varepsilon_t$$

단 $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \longrightarrow \beta_4 = (1 - \beta_2 - \beta_3)$

$$\ln(y_t/X_{t4}) = \beta_1 + \beta_2 \ln(X_{t2}/X_{t4}) + \beta_3 \ln(X_{t3}/X_{t4}) + \varepsilon_t$$

$$y_t^* = \beta_1 + \beta_2 X_{t2}^* + \beta_3 X_{t3}^* + \varepsilon_t$$

변형된 모형에 대해 최소제곱추정을 함

비표본정보의 이용

제한최소제곱추정

- 제한최소제곱추정량(restricted least squares estimator)은 부과한 제약이 정확히 사실이 아니라면 불편추정량이 되지 못함
- 제한최소제곱추정량은 그 제약이 옳든 옳지 않든간에 그 분산이 원래의 모형에 대한 최소제곱추정량에 비해 작음
- 자료에 대한 추가적인 정보를 이용하고자 할 때 대개 불편성을 희생하는 대가로 분산을 줄여주게 됨

원점을 통과하는 회귀식

상수항이 없거나 0인 모형.

i.e., $y_t = \beta_2 x_t + \varepsilon_t$

LS 추정

$$b_2 = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} \quad \textbf{and} \quad Var(b_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

$$\textbf{and} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{\varepsilon}^2}{T-1}$$

원점을 통과하는 회귀식의 특징

1. $\sum \hat{\varepsilon}_t$ 반드시 0일 이유는 없음
2. R^2 모형의 통계적 성질을 나타내는 척도로 부적절하게 됨(계산 routine에 따라 음의 값이 나타날 수도 있음)
3. $SST \neq SSR + SSE$
   df 상수항을 포함하지 않음, i.e., (T-K+1)

In practice:

1. 매우 강한 선험적 혹은 이론적인 근거가 뒷받침 될 경우가 아니라면 원래의 상수항이 존재하는 모형을 사용

2. 회귀모형에 상수항을 포함하고 그것이 통계적으로 유의하지 않는 경우 그것을 제거하고 다시 회귀분석을 할 수도 있음

모형의 설정

- 모형을 선택할 때 고려해야 하는 중요한 점은 무엇인가?
- 잘못된 모형의 선택으로 인한 결과는 무엇인가?
- 모형이 적절한지 여부를 평가할 방법이 있는가?

모형의 설정

누락된 변수와 관련없는 변수

True Model: $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \varepsilon_t$

Estimate: $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \upsilon_t$

- 옳지 않는 β_3=0이라는 제약을 모형에 부과한 것임
- 적절한 변수의 “누락(Omission)”은 모형에 대한 잘못된 제약의 부과와 마찬가지임
- 불편추정량을 얻을 수 없으며 분산의 크기는 감소하게됨

모형의 설정

누락된 변수와 관련없는 변수

Estimate: $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \upsilon_t \Rightarrow b_2^*$

Estimate: $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_2 X_{t3} + \varepsilon_t \Rightarrow b_2$

$$E(b_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \frac{\sum (x_{t2} - \bar{x}_2)(x_{t3} - \bar{x}_3) / (T-1)}{\sum (x_{t2} - \bar{x})^2 / (T-1)}$$

$$= \beta_2 + \beta_3 \frac{\hat{\text{cov}}(x_{t2}, x_{t3})}{\hat{\text{var}}(x_{t2})} \neq \beta_2$$

$$Var(b_2^*) = \frac{\sigma_\upsilon^2}{\sum (x_{t2} - \bar{x}_2)^2}$$

$$\leq \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - r_{23}{}^2) \sum (x_{t2} - \bar{x}_2)^2} = Var(b_2),$$

$$\Rightarrow Var(\upsilon_t) = Var(\beta_3 x_{t3} + \varepsilon_t) = Var(\varepsilon_t)$$

- b_2*가 여전히 불편 추정량 인 경우:
  - X_{t2} 와 X_{t3} 가 상관되어 있지 않음
  - β_3 가 0일 때

모형의 설정

누락된 변수와 관련없는 변수

True Model: $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t$

Estimate: $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \omega_t$

- In fact, β_3=0.
- 적절하지 않은 변수의 “포함” 은 최소제곱 추정량의 불편성에 영향을 주지 않음
- 하지만 옳바른 모형을 통해 얻는 추정량에 비해 b_1 와 b_2 의 분산이 더 커지게 됨

모형의 설정

공선성

‘독립변수’ 는 설명변수가 오차항과 독립임을 의미하는 것이며 다른 설명변수들과 독립임을 의미하는 것은 아님

자료가 창출된 암묵적 실험에 대해 경제학자들은 대개 아무런 통제를 할 수 없기 때문에 설명변수들이 같이 움직임으로 인해 개별 설명변수들의 영향을 분리해내는 것을 문제가 되게 하는 경우가 종종 있음

모형의 설정

공선성의 효과

높은 공선성은 다음과 같은 문제를 일으킴

1. 공선성이 정확(exact)한 경우 최소제곱추정 결과를 얻을 수 없음 – 기본 가정 5
2. 표준오차가 커지고 따라서 신뢰구간이 넓어짐
3. 결정계수의 값이 높고 모형의 유의성에 대한 F값이 높음에도 불구하고 t값들이 유의성 없게 나타남
4. 추정치(그리고 그 유의성)들이 관측치 혹은 유의성 없는 변수들의 삭제 혹은 추가에 민감하게 변화함
5. 두 설명변수가 (공선성에서 암시되는) 일정 비율로 주어지는 경우 종속변수에 대한 예측력은 괜찮으나 다른 비율로 주어지는 경우 예측력이 나쁨

공선성의 확인

높은 공선성의 증거는 다음과 같음:

1. 두 설명변수간에 높은 상관계수 (> 0.8 or 0.9)
2. 하나의 설명변수를 다른 설명변수들에 대해 회귀분석(보조적 회귀, auxilary regression)을 차례로 수행할 때 나타나는 높은 결정계수의 값 (> 0.8)
3. t값들은 유의하지 못한데, F값은 통계적으로 유의할 경우

공선성의 완화

높은 공선성은 표준적 가정에 대한 위반은 아니며 그 보다는 표본에 설명변수의 개별적 영향에 대한 정보가 부족함을 나타냄:

1. 더 나은 정보를 가진 자료의 추가적 수집
2. 적절한 경제적 제약을 부과.
3. 정당성이 확보되는 경우 통계적 제약을 부과.
4. 이 모든게 실패할 경우, 모형의 문제점이 이러한 공선성의 문제로 인한 것 (혹은 그로 인한 것이 아니라는 것)을 지적함

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \varepsilon_t$$

Given a set of values for the explanatory variables, $(1 \;\; X_{02} \;\; X_{03})$, the best linear unbiased predictor of y is given by:

$$\hat{y}_0 = b_1 + b_2 X_{02} + b_3 X_{03}$$

This predictor is unbiased in the sense that the expectation of the forecast error is zero.

$$f = (y_0 - \hat{y}_0) \;\Rightarrow\; E(f) = 0$$

- The predictor is best in that the variance of the forecast error of any other linear and unbiased predictor of y_0, is larger than $\operatorname{var}(f) = \operatorname{var}(y_0 - \hat{y}_0)$
- $\dfrac{f}{\operatorname{se}(f)} = \dfrac{y_0 - \hat{y}_0}{\sqrt{\widehat{\operatorname{var}}(y_0 - \hat{y}_0)}} \sim t_{(T-K)}$
- A $100(1-\alpha)\%$ interval predictor for y_0 is

$$\hat{y}_0 \pm t_c \operatorname{se}(f)$$

, where t_c is a critical value from the $t_{(T\text{-}K)}$ distribution.