제 3 강

단순 선형회귀 모형
(The Simple Linear Regression Model)

회귀분석의 목적

1. y = f(x)와 같이 이론에서 주어지는 경제적 변수들 간의 관계를 추정(estimate) 및 검정(test).

2. 설명변수의 값을 토대로 종속변수의 값을 예측(forecast)

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

y = 매주 식료품에 지출된 액수($).

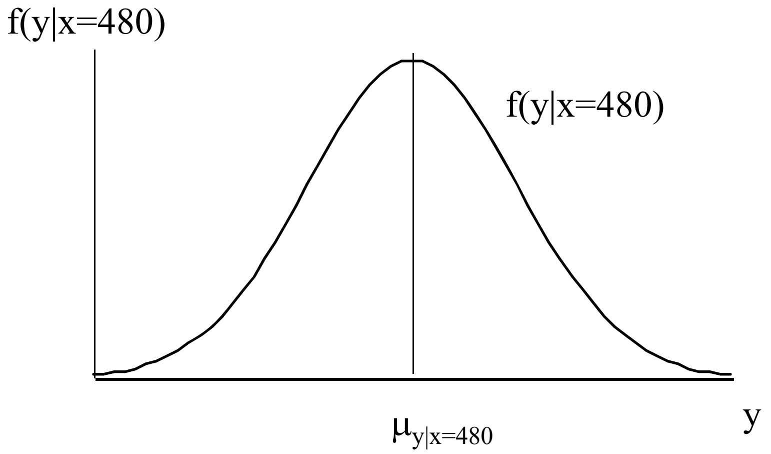
x = 소비자의 주당 소득.

x가 주어졌을 때 y의 기대값과 x와의 관계는 선형(linear)일 수 있음

$$E(y|x) = \beta_1 + \beta_2 x$$

회귀분석의 목적

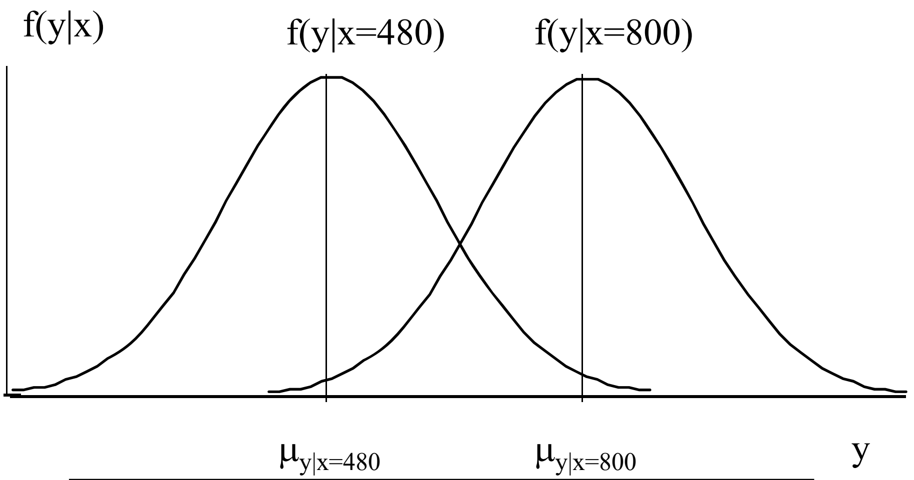
주당 식료품 지출



Probability Distribution f(y|x=480) of Food Expenditures if given income x=$480.

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

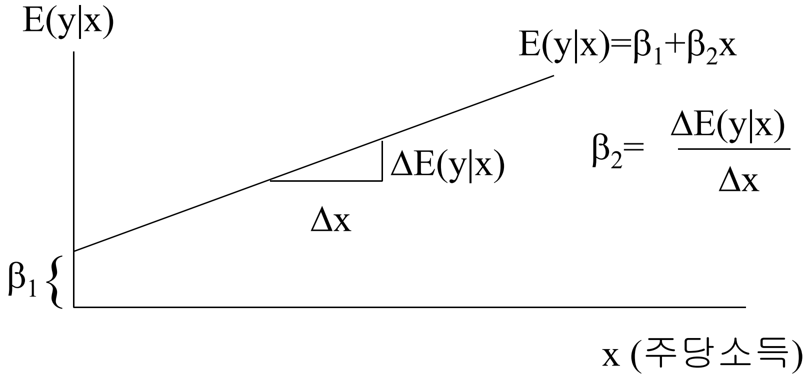


Probability Distribution of Food Expenditures if given income x=$480 and x=$800.

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출

평균지출(average expenditure)

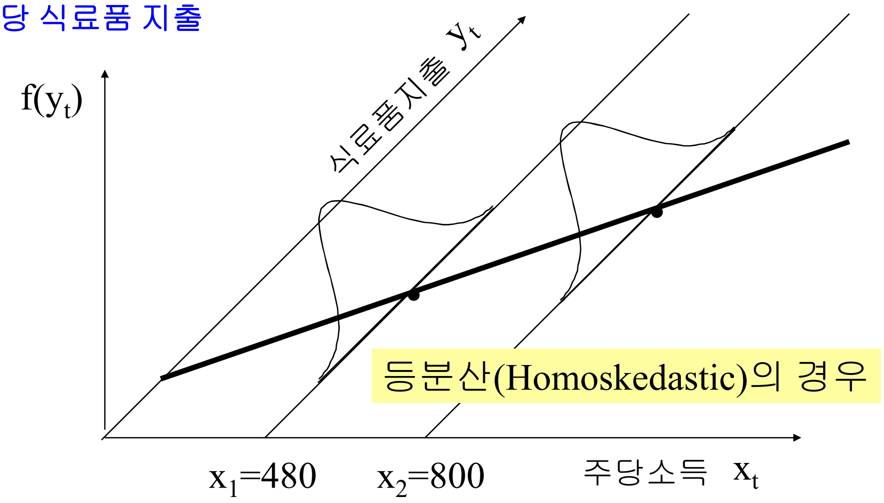


$$\beta_2 = \frac{\Delta E(y|x)}{\Delta x}$$

The Economic Model: a linear relationship between average expenditure on food and income.

회귀분석의 목적

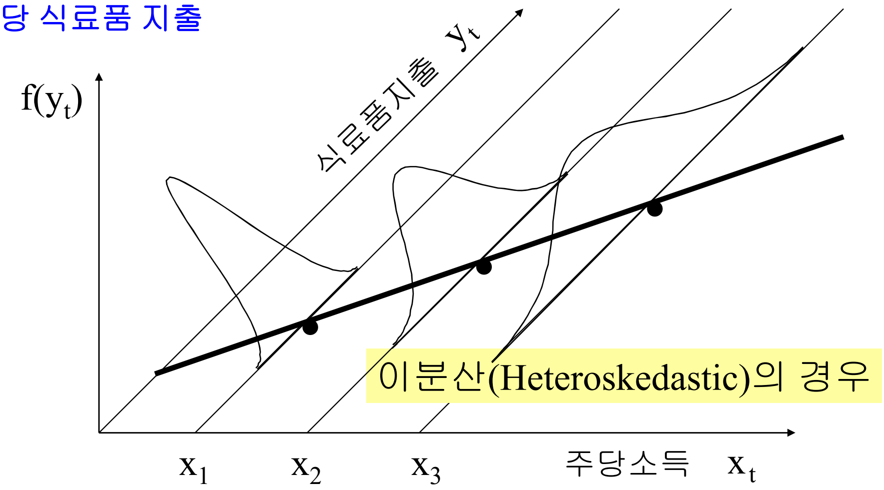
주당 식료품 지출



The probability density function
for y_t at two levels of household income, x_t

회귀분석의 목적

주당 식료품 지출



The variance of y_t increases
as household income, x_t, increases.

단순 선형회귀 모형의 가정

1. 주어진 x_t에 대해 y_t의 평균값은 선형(회귀)식으로 주어진다.

$$E(y_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t,\ t=1,\cdots,T$$

2. 각 x_t의 값에 대해 y_t의 값은 그 평균값 주변에서 다음의 분산을 갖는 분포를 한다.

$$var(y_t) = \sigma^2$$

3. y_t의 값들은 상관되어 있지 않으며, 즉 0의 공분산을 가지며, 따라서 선형관계를 갖지 않는다.

$$cov(y_i, y_j) = 0$$

4. 변수 x는 적어도 두개의 다른 값을 가지며 확률변수가 아니다.

단순 선형회귀 모형의 가정

실제 종종 사용되기는 하지만 추정(estimation)에 있어서 반드시 필요하지는 않은 추가적 가정

5. (optional) y_t의 값들은 각 x_t값에 대해 그들의 평균 주변에서 정규분포를 함

$$y_t \sim N\,[(\beta_1+\beta_2 x_t),\ \sigma^2\,]$$

오차항(The Error Term)

오차항의 도입

y는 두 부분으로 구성되는 확률변수이다.

I. 체계적 부분: $E(y_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$
y의 평균임.

II. 확률적 부분: $\varepsilon_t = y_t - E(y_t)$
$= y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t$

이 부분을 오차항이라고 부름.

E(y)와 ε 이 함께 모형을 형성함

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

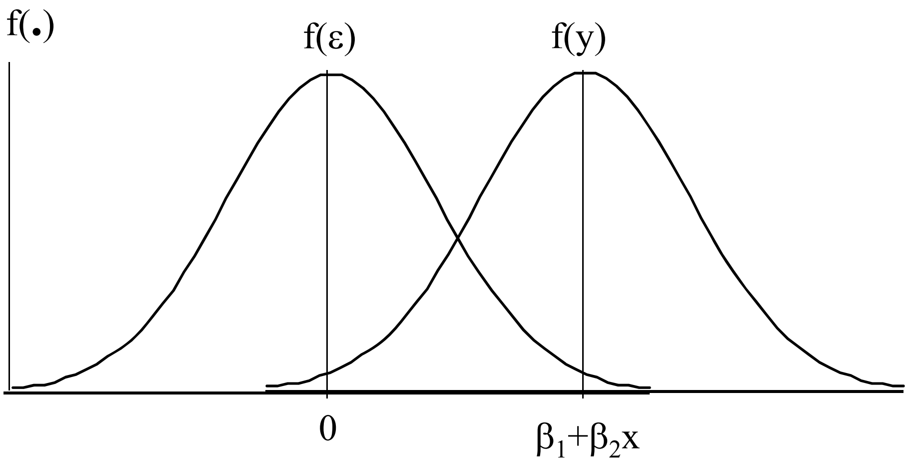
오차항(The Error Term)

오차항의 원천

1. 모형에서 구체화 되지 않은 요소들/설명변수들이 오차항에 있을 수 있다.
2. y와 x의 관계가 정확히 선형관계가 아닌 경우 근사(approximation)오차가 오차항에 있게 된다.
3. 관측치에 특정적인 순수하게 예측불가능한 확률적 행태가 오차항에 있게 된다.

오차항(The Error Term)

오차항의 분포



Probability density function for ε and y

단순 선형회귀 모형의 가정 II

오차항

1. x_t의 각 값에 대해 y의 값은:

   $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$, t=1,…,T

2. (주어진 x_t에 대해) 오차항 ε_t의 평균적 값은 :

   $E(\varepsilon_t) = 0$

3. (주어진 x_t에 대해) 오차항 ε_t의 분산은 :

   $var(\varepsilon_t) = \sigma^2 = var(y_t)$

4. 임의의 두 오차항 쌍(pair)간의 공분산은:

   $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = cov(y_i, y_j) = 0$

5. x 는 반드시 두 개의 다른 값을 가지며 확률변수가 아니다.

6. ε_t 는 평균은 0이고 분산은 $var(\varepsilon_t)=\sigma^2$ 인 정규분포를 한다. (optional) $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$

참고: 단순 선형회귀 모형의 가정 III : 강 외생성

강 외생성(strict exgoneity)

- 설명변수 x가 확률변수가 아니라는 가정
  - 실험실에서의 통제된 자료와 같이 x를 변화시킴에 있어서, y에 영향을 미치는 다른 모든 요인들(ε)은 x의 변화와 무관함을 보증
    - 이 경우 우리는 x의 변화가 y에 대해 미치는 영향의 크기를 $\frac{\Delta E(y_t \mid x_t)}{\Delta x_t} = \beta_2$ 에서 확인할 수 있음
- 설명변수 x가 확률변수라고 가정해도
  - x의 변화가 y에 영향을 미치는 다른 모든 요인들(ε)과 독립적이라면 동일한 결과를 얻음
  - $E\left(\varepsilon_t \middle| x_1, \ldots, x_T\right) = 0$ 를 충족하는 경우 설명변수 x는 강 외생적(strictly exogenous)라고 함
  - 이는 설명변수 x가 어떻게 변화하던 무관하게, y에 영향을 미치는 다른 요인들(ε)이 평균적으로 y에 미치는 영향은 항상 0임
    - 따라서 x의 변화는 ε 의 변화와 독립적임을 의미함

참고: 단순 선형회귀 모형의 가정 III : 강 외생성

강 외생성(strict exgoneity)하의 가정 1

1. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$, t=1,…,T
2. (x_t, y_t) 는 확률표본(각 쌍은 동일하고 독립적인 분포)
3. (주어진 x_t에 대해) $E(\varepsilon_t \mid x_t) = 0$ (강 외생성)
4. $var(\varepsilon_t \mid x_t) = \sigma^2 = var(y_t \mid x_t)$
5. x 는 반드시 두 개의 다른 값을 가진다.
6. (optional) $\varepsilon_t \mid x_t \sim N(0, \sigma^2)$

참고) 단순 선형회귀 모형의 가정 III : 강 외생성 계량경제학 3.17

강 외생성(strict exgoneity)하의 가정 2

1. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$, t=1,⋯,T
2. (주어진 $x=(x_1,\cdots,x_T)$에 대해) $E(\varepsilon_t | x) = 0$ (강 외생성)
3. $Var(\varepsilon_t \mid x) = \sigma^2 = var(y_t \mid x)$
4. $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j | x) = cov(y_i, y_j | x) = 0$
5. x 는 반드시 두 개의 다른 값을 가진다.
5. (optional) $\varepsilon_t | x_t \sim N(0,\sigma^2)$

모수의 추정 (Estimating the parameters) 계량경제학 3.18

모집단(Population) 회귀값:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

모집단 회귀선(regression line):

$$E(y_t | x_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$$

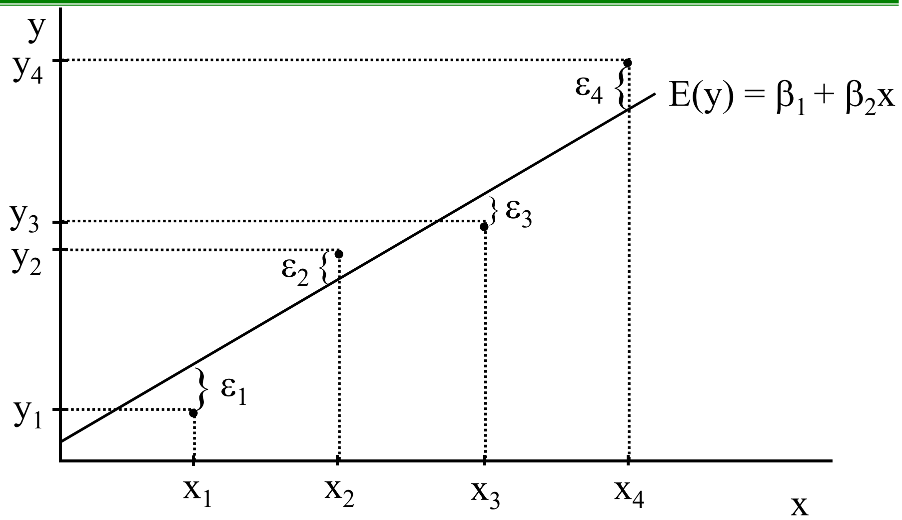
표본(Sample) 회귀값:

$$y_t = b_1 + b_2 x_t + \hat{\varepsilon}_t$$

표본(Sample) 회귀선:

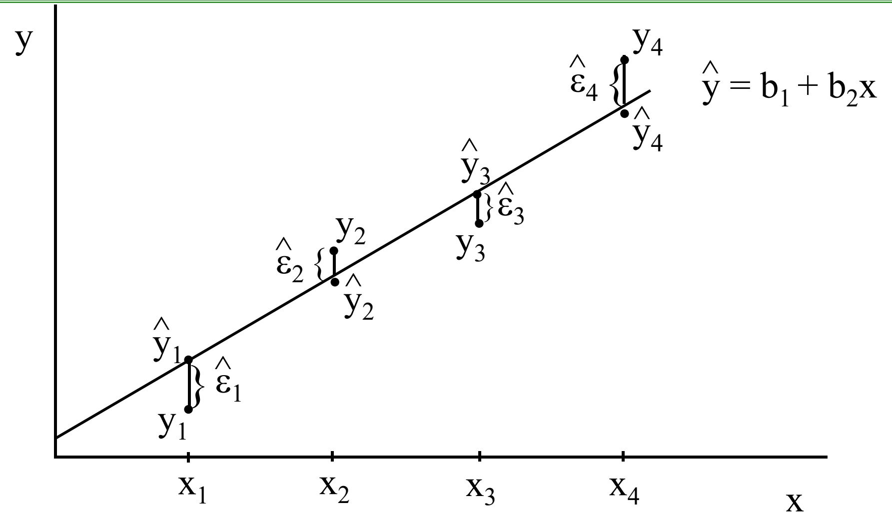
$$\hat{y}_t = b_1 + b_2 x_t$$

모수의 추정 (Estimating the parameters)



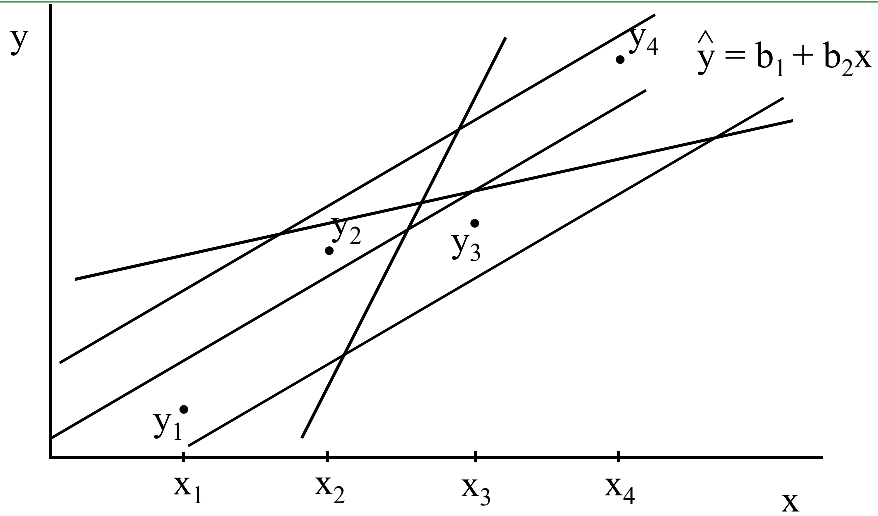
The relationship among y, ε and the true regression line.

모수의 추정 (Estimating the parameters)



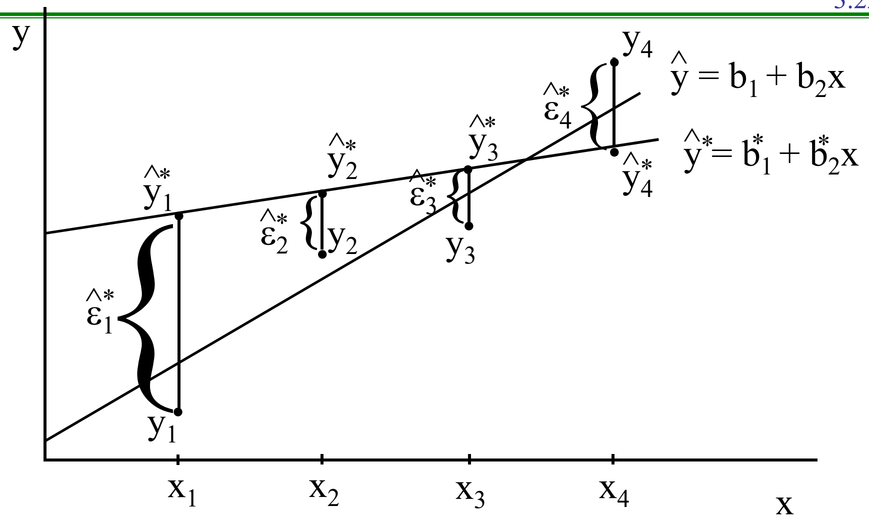
The relationship among y, $\hat{\varepsilon}$ and the fitted regression line.

모수의 추정 (Estimating the parameters)



How to find b_1 and b_2

최소제곱의 원칙(The Least Squares Principle)



The sum of squared residuals
from any other line will be larger.

최소제곱의 원칙(The Least Squares Principle)

계량경제학 3.23

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t$$

편차의 제곱의 합을 최소화 함

$$S(\beta_1,\beta_2) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)^2 \qquad (3.3.4)$$

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

계량경제학 3.24

Minimize w.r.t. β_1 and β_2:

$$S(\beta_1,\beta_2) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)^2 \qquad (3.3.4)$$

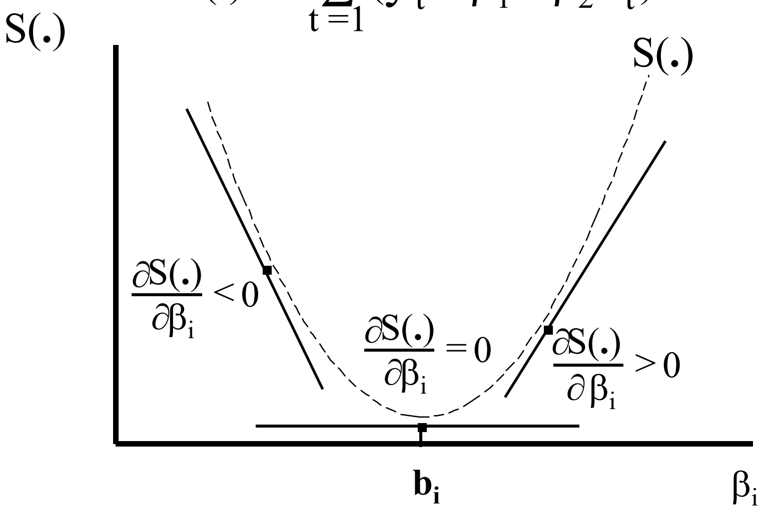
$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_1} = -2 \sum (y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)$$

$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_2} = -2 \sum x_t(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)$$

두 편미분을 0으로 놓고, 이 두 방정식을 두 미지수 β_1 β_2 에 대해 풀면:

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

$$S(.) = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)^2$$



최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_1} = -2 \sum (y_t - b_1 - b_2 x_t) = 0$$

$$\frac{\partial S(.)}{\partial \beta_2} = -2 \sum x_t (y_t - b_1 - b_2 x_t) = 0$$

이 두 식을 0으로 놓게 되면 β_1 and β_2 는 b_1 and b_2 로 표기할 수 있는데 이는 이들이 더 이상 임의의 미지의 값 β_1 and β_2 를 나타내는 것이 아니라 S(.)의 최소값에 대응되는 어떤 특별한 값을 나타내기 때문임.

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

$$-2\sum(y_t - b_1 - b_2x_t) = 0$$

$$-2\sum x_t(y_t - b_1 - b_2x_t) = 0$$

$$\sum y_t - Tb_1 - b_2\sum x_t = 0$$

$$\sum x_ty_t - b_1\sum x_t - b_2\sum x_t^2 = 0$$

$$Tb_1 + b_2\sum x_t = \sum y_t$$

$$b_1\sum x_t + b_2\sum x_t^2 = \sum x_ty_t$$

최소제곱 추정(The Least Squares Estimation)

$$Tb_1 + b_2\sum x_t = \sum y_t$$

$$b_1\sum x_t + b_2\sum x_t^2 = \sum x_ty_t$$

$\bar{x}$와 $\bar{y}$의 정의를 이용하여 b_1과 b_2 에 대해서 품

$$b_2 = \frac{T\sum x_ty_t - \sum x_t\sum y_t}{T\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

추정값의 활용

탄력성

$$\eta = \frac{\text{y의 변화율}}{\text{x의 변화율}} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}$$

미적분학을 이용하면 한 점에서의 탄력성을 얻음

$$\eta = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}\right] = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

추정값의 활용

탄력성

$$E(y) = \beta_1 + \beta_2 x$$

$$\frac{\partial E(y)}{\partial x} = \beta_2$$

$$\eta = \frac{\partial E(y)}{\partial x}\frac{x}{E(y)} = \beta_2 \frac{x}{E(y)}$$

추정값의 활용

$(\bar{x},\bar{y})$ 에서의 탄력성

$$\hat{\eta} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = b_2 \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

$$\hat{y}_t = b_1 + b_2 x_t = 4 + 1.5 x_t$$

$\bar{x}$ = **8** = average number of years of experience

$\bar{y}$ = **$16** = average wage rate

$$\hat{\eta} = b_2 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 1.5 \frac{8}{16} = 0.75$$

추정값의 활용

예측

Estimated regression equation:

$$\hat{y}_t = 4 + 1.5 x_t$$

x_t = years of experience

$\hat{y}_t$ = predicted wage rate

If x_t = **2** years, then $\hat{y}_t$ = $7.00 per hour.

If x_t = **3** years, then $\hat{y}_t$ = $8.50 per hour.

Log-log 모형

$$\ln(y) = \beta_1 + \beta_2 \ln(x)$$

$$\frac{\partial \ln(y)}{\partial x} = \beta_2 \frac{\partial \ln(x)}{\partial x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2 \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial x}$$

Log-log 모형

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2 \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$\frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2$$

x에 대한 **y**의 탄력성

$$\eta = \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_2$$